**УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ, МОЛОДІ ТА СПОРТУ**
**МИКОЛАЇВСЬКОЇ ОБЛДЕРЖАДМІНІСТРАЦІЇ**
**МИКОЛАЇВСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ЦЕНТР НАУКОВО-ТЕХНІЧНОЇ ТВОРЧОСТІ УЧНІВСЬКОЇ МОЛОДІ**
**МИКОЛАЇВСЬКЕ ТЕРИТОРІАЛЬНЕ ВІДДІЛЕННЯ МАЛОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ**

**Секція математики**

Гурток
***“ Математика ”.***
***Позашкільний компонент***
*2 рівень*
для слухачів МАН (10-11 клас)

Методичні вказівки до заняття
за темою
***„ Теорія чисел, конгруентність ”***

Керівник гуртка:
вчитель математики
**Гозян Наталія Іванівна**

Миколаїв 2011

Зміст

# ВСТУП (ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА)

Теорія чисел складає основу математичної освіти. Відповідні розділи математики мають солідну історію, але і зараз бурхливо розвиваються. У свій час такі розділи теорії чисел, як теорія конгруенцій, теорія алгебраїчних чисел суттєво вплинули на становлення сучасної алгебри, і навпаки, результати і методи сучасної алгебри значно змінили обличчя теорії чисел.

Однією з форм роботи з інтелектуально обдарованою молоддю є Мала академія наук України (МАН). МАН – це структурна складова системи позашкільної освіти, яка сприяє виявленню здібностей, обдарувань, і самовизначенню та реалізації особистості засобами залучення до пошукової, експериментальної, дослідницької роботи в різних галузях науки і техніки, забезпечує її творчий, інтелектуальний, духовний розвиток, професійну орієнтацію, підготовку до майбутньої професійної та громадської діяльності.

Мета МАН – поглиблення науково-практичних знань із галузевих наук у секціях і наукових товариствах, подальше зміцнення наукових зв’язків між шкільною молоддю і науковими установами.

Педагогічний процес у МАН має свої особливості, які відрізняють його від звичайних уроків у школі. І перш за все це те, що плани й програми наукових гуртків охоплюють такі галузі знань і практичної діяльності, які виходять за межі уроку, враховуючи індивідуальні інтереси та творчий потенціал конкретної дитини.

Одним із напрямків формування особистості школяра як творчої особистості, розвитку позитивних якостей кожного учня, його потенційних можливостей є впровадження позашкільного компоненту в рамках гуртка малої академії наук.

Нова організація навчальної діяльності учнів, яка ґрунтується на запровадженні позашкільного компоненту в рамках МАН, змінює джерела навчальних відомостей, і, в першу чергу, навчальну книгу. Крім традиційних друкованих підручників, у навчанні математики ширше застосовуються підручники нового типу: програмовані, мультимедійні, електронні.

У процесі підготовки до занять гуртківці навчаються та закріплюють вміння й навички в підборі матеріалу, учаться аналізувати, установлювати причинно-наслідкові зв'язки. У процесі дискусії учні вчаться висловлювати свої думки, відстоювати свою точку зору, вислуховувати міркування своїх товаришів.

# 1. ТЕМА ТА МЕТА ЗАНЯТТЯ.

## 1.1. ТЕМА ЗАНЯТТЯ

Спираючись на історичні витоки теорії чисел розглянути основні методи теорії чисел, зокрема: остачі та конгруенції (порівняння). Вивчити основні властивості теорії конгруенцій та розглянути деякі їх арифметичні застосування

## 1.2. ДИДАКТИЧНА МЕТА ЗАНЯТТЯ.

Ввести поняття конгруенції (порівняння) та дії над ними. Сформулювати основні властивості теорії конгруенцій та показати їх практичне застосування.

*Мотивація навчання:*

- розвиток математичних здібностей учнів;
- формування алгоритмічного мислення та високої логічної культури;
- вироблення навичок самостійної роботи при розв’язуванні задач;
- перенесення засвоєних знань на розв’язування складних та нестандартних задач;
- якісна підготовка до успішної участі в обласному конкурсі-захисті робіт дійсних членів МАН.

Після вивчення матеріалу заняття гуртківці повинні

***знати:***

- математичні факти;
- основні алгоритми та методи розв’язування алгебраїчних задач з необхідним обґрунтуванням ;

**вміти:**

- оволодівати необхідною інформацією для розуміння постановки математичної задачі;
- проектувати і здійснювати алгоритмічну та евристичну діяльність на математичному матеріалі;
- розв’язувати завдання в знайомих ситуаціях із достатнім поясненням;
- використовувати набуті знання і вміння;
- узагальнювати й систематизувати набуті знання;
- самостійно розв’язувати задачі і вправи;

***Тип заняття***: Заняття засвоєння нових знань.

### 1.3. ФОРМА ПРОВЕДЕННЯ ЗАНЯТТЯ.

Заняття поділяється на дві частини - теоретичну та практичну. Теоретична частина проводиться у вигляді лекції. Практична частина у вигляді розв’язання низки вправ за допомогою вчителя та самостійно у вигляді контрольного тесту (тест-контроль).

### 1.4. ОСНОВНІ ПОНЯТТЯ.

Основні поняття, яки вводяться на занятті: матриця, типи матриць - квадратна, прямокутна, одинична, нульова діагональна; обернена матриця; система лінійних рівнянь двох змінних, розв’язки системи лінійних рівнянь двох змінних; лінійні перетворення.

## 2. ХІД ЗАНЯТТЯ.

### 2.1. ПЛАН ПРОВЕДЕННЯ ЛЕКЦІЇ (ТЕОРЕТИЧНА ЧАСТИНА ЗАНЯТТЯ):

- Історичні витоки теорії чисел:числа в шерензі віків.
- . Натуральні числа
- . Дробові числа
- . Від'ємні числа
- . Ірраціональні числа
- . Комплексні числа
- . Остачі.
- Конгруенції та їх застосування .

#### 2.1.1. ІСТОРИЧНІ ВИТОКИ ТЕОРІЇ ЧИСЕЛ:ЧИСЛА В ШЕРЕНЗІ ВІКІВ.

Першим було поняття натурального числа. Воно виникло дуже рано і стало першою абстракцією, виробленою людиною. Термін "натуральне число" вперше ввів римський державний діяч, філософ, автор праць з математики Боецій (480 – 574 рр.), але ще грецький математик Ніколах говорив про натуральний, тобто, природний ряд чисел. Поняттям "натуральне число" у сучасному його розумінні послідовно користувався видатний французький математик Даламбер (1717 – 1789 рр.)

Потім у процесі вимірювання величин виникли дроби, які історично є першим розширенням поняття натурального числа. Але поняття дробового числа було усвідомлено не відразу. Довгий час натуральні числа були єдиними відомими числами; поняття числа було синонімом тільки натурального числа. Навіть у Евкліда термін "число" використовується тільки для натуральних чисел. Дробові числа хоч і були йому відомі, все ж таки не були для нього числами, а були тільки відношеннями натуральних чисел. Все це вказує на повільний розвиток поняття "число", але вже стародавні греки усвідомлювали важливість чисел та їх властивостей. Так, видатний вчений античної Греції Піфагор заснував математичну школу, яка в честь засновника звалась – піфагорійською. Основним змістом піфагорійської математики є вчення про число. Як і вавилоняни, піфагорійці вважали надзвичайно важливими різні властивості чисел і відношення між ними. І, коли відсіяти половину – числову містику -виявиться, що вони ввели багато фундаментальних теоретико-числових понять, виявили і дослідили глибокі властивості чисел та поставили такі питання, які й сьогодні залишаються предметом досліджень багатьох математиків.

В піфагорійській школі користувались оригінальним способом подання натуральних чисел множиною точок у формі різних геометричних фігур. Так вперше була застосована геометрія для вивчення натуральних чисел, тому звідси і беруть початок назви: "квадратні" та "кубічні" числа. Цей спосіб подання натуральних чисел є наслідком громіздкої системи числення, якою користувалися греки. Найважливішою властивістю натуральних чисел піфагорійці вважали парність і непарність, вони першими ввели поняття парного і непарного числа, простого і складного числа, та розробили кілька класифікацій натуральних чисел. Надалі вирішальну роль у розвитку поняття "числа" вирішували задачі, які зводились до розв’язування алгебраїчних рівнянь, а також задачі, пов’язані з необхідністю введення обернених операцій (поняття від’ємного, ірраціонального та комплексного числа).

Введення від’ємних чисел було зумовлене, в першу чергу, розвитком алгебри як науки, що дає загальні способи розв’язання арифметичних задач незалежно від вихідних числових даних. Від’ємні числа були необхідні вже при розв’язуванні задач, які зводяться до рівнянь першого ступеня з однією зміною. Можливий від’ємний розв’язок у таких задачах можна пояснити прикладами протилежних величин (протилежно напрямлені вектори, температура, вища і нижча від нуля тощо).

Додатні і від’ємні кількості вперше в історії науки розрізняли в Китаї ще понад 2000 років тому додатки в китайській математиці називали "чен", від’ємні "фу", їх зображували різними кольорами ("чен"–червоним, "фу" –- чорним).

У 5–6 ст. від’ємні числа з’явилися в індійській математиці. В Індії від'ємні числа систематично застосовували і тлумачили в основному так само, як це ми робимо тепер. Від’ємним числами індійські математики користувалися при розв’язанні рівнянь, причому віднімання замінювали додаванням до рівного і протилежного числа. Про те, як індійські вчені відкрили від’ємні числа, достовірно нічого невідомо. Дальший розвиток вчення про від’ємні числа відбувався у Європі. До ідеї від’ємної кількості досить близько підійшов на початку 13 ст. Леонардо Пізанський. Але у явному вигляді від’ємні числа застосував уперше наприкінці 15 ст. французький математик Шюке. Сучасні позначення додатних та від’ємних чисел із знаками "+" і "-" ввів у кінці 15 ст. німецький математик Відман. Однак ще в 16 ст. багато математиків не визнавали від'ємних чисел наприклад, Ф.Вієт). Від'ємні числа почали широко застосовуватись у європейській науці тільки з часів видатних французьких математиків Р.Декарта та П.Ферма. Створена ними аналітична геометрія надала рівноправності від'ємним та додатним числам. У 16 і 17 ст. почалися суперечки щодо природи від'ємних чисел. Але тільки у 19 ст. було строго теоретично обґрунтовано поняття від'ємного числа та дій над ними. Отже, на введення від'ємних чисел у науку на рівних правах з додатними числами було витрачено людством більше тисячі років!

Сукупність натуральних, дробових та від'ємних (дробових і протилежних натуральним) чисел називають раціональними.

Раціональні числа не мають властивості неперервності, тому їх виявилось недостатньо для вивчення величин, що змінюються неперервно. З'явилась потреба розширити поняття числа, приєднавши до раціональних ірраціональні числа.

Ірраціональні числа були відомі вавилонянам ще приблизно в 4000 р. до н.е. Але першими почали розглядати ірраціональні числа, як числа нового виду, індійці та, пізніше, араби.

Індійці першими перенесли дії над раціональними числами на ірраціональні. Проте індійці не задумувалися над тим, чи законно додавати ірраціональні числа. Індійські математики передали поняття ірраціонального числа арабським математикам, які розвинули та, в свою чергу, передали поняття ірраціонального числа далі, математикам Західної Європи. В Західній Європі згадка про ірраціональні числа зустрічаються в Леонардо Пізанського. Проте ці числа ввійшли в європейську математику лише в 15–16 ст.ст., коли в Європі почали розвиватися алгебра та тригонометрія.

Знайти прообрази ірраціональних чисел поза геометричними величинами математиків 15 – 16 ст. не вміли. Тому для них ірраціональні числа поза геометрією були символами, позбавленими певного змісту.
В 17–18 ст. математики Велліс, Ньютон знайшли інші алгебраїчні інтерпретації ірраціональних чисел.

Однак, аж до другої половини 19 ст. не було розроблено загальної теорії ірраціональних чисел. Остаточно розвинули теорію ірраціональних чисел німецькі математики другої половини 19 ст. Р.Дедекінд (1831–1916 рр.), Г.Кантір (1845–1918 рр.) і К.Вейєрштрас (1815–1897 рр.) у зв'язку з потребами математичного аналізу.

Наступним етапом у розвитку поняття числа було введення комплексних чисел. Комплексні числа завдячують своїм виникненням розвиткові алгебри, а саме: розв'язування рівнянь вищих степенів. Очевидно, китайські, пізніше. Індійські математики зустрілися з комплексними числами при розв'язуванні квадратних рівнянь, але, оскільки не існує дійсного числа квадрат якого був би від'ємним числом, індійські математики зробили висновок, що квадратні корені з від'ємних чисел не існують. Так, перша згадка про комплексні числа є в книжці італійського математика Д. Кардано (1501–1576 рр.) "Велике мистецтво або про правила алгебри". Італійський математик Бомбеллі у своїй "Алгебрі", яка вийшла 1571 році продовжував вивчати властивості комплексних чисел.

З 18 ст. комплексні числа почали застосовувати в геометрії і тригонометрії ("Геометрія" Декарта, формули Ейлера, Муавра тощо). Однак, арифметика комплексних чисел набула завершальності тільки в другій половині 18 ст. Вперше геометричну інтерпретацію комплексних чисел як векторів на площині дав датський математик Гаспар Вессаль в своїй праці "Про аналітичне подання векторів". Ця праця Вессаля і вершиною досягнення математичної думки 18 ст. у галузі обгрунтування та розвитку поняття числа. Подальше узагальнення комплексних чисел у 19 ст. привели створення загальної теорії гіперкомплексних чисел, тобто чисел $n$-го ($n \in N$) порядку (комплексні числа є гіперкомплексними числами 2-го порядку).

Поряд з основним напрямом в розвитку поняття числа: натуральні$\rightarrow$дробові$\rightarrow$від'ємні$\rightarrow$іраціональні$\rightarrow$комплексні. Існують і інші узагальнені поняття числа в зовсім інших напрямках.

## 2.1.2. НАТУРАЛЬНІ ЧИСЛА

Натуральне число – одне з найдавніших понять. Тому простежити розвиток цього поняття від зародження за безпосередніми даними неможливо, оскільки корні цього поняття сягають в глибину віків. Про це свідчить папірус Рінда, переписаний в 19 – 18 ст. до н.е. єгипетським переписувачем Ахмесом. Зміст папірусу говорить про високий рівень арифметичних знань та обізнаність із діями не тільки натуральних чисел, а й дробових. Єгиптяни були в ті далекі часи не єдиним народом з таким обсягом математичних знань. Вавилоняни ще принаймні 4 000 р. до н.е. накопичили деякі арифметичні знання у формі "рецептів", що супроводжувались словами: "Роби так і отримаєш правильне". Це говорить про несвідомі математичні знання.

Початкове формування поняття натурального числа в дописемну епоху відбувалося завдяки відкриттю та розвитку лічби. Людство не завжди мало чітке уявлення про число, про це свідчать перекази, в яких розповідається, що числа людям "дали" конкретні міфічні особи, наприклад, в греків це були Пальмед і Прометей. Так, в трагедії великого стародавнього драматурга Есхіла "Прикутий Прометей", написано:

"Послухайте, що смертним зробив я....Число їм винайшов..."

Звичайно, в ті дуже далекі часи жодній людині було не під силу виконати таку психологічну роботу, люди самі, передаючи досвід та знання, розвивали і вдосконалювали поняття числа в процесі розвитку лічби протягом багатьох тисяч років, тим самим наближаючись до твердого усвідомлення поняття числа в образі натурального числа.

Про те, як в ті далекі часи відбулось формування й потім розвиток поняття числа взагалі, можна судити за даними етнології, оскільки до цього часу є племена (в Австралії, Африці, Південній Америці, Малій Азії) з первісним складом життя.

Так, дамари (жителі південно-західної Африки) в практичній діяльності не мали справи з числівниками більшими за 3. 4 і 5 (вони вже подавали за допомогою пальців, а от за 5 дамарам було перейти дуже важко).

Незважаючи на те, що розширення натурального ряду, як бачимо, відбувалося повільно причому явно не встигаючи за запитами практики, людина знайшла вихід з положення: введенням в використання (звичайно, несвідомо) властивості рівнопотужності множин, що дало змогу порівнювати великі сукупності предметів.

Так, наприклад, вимінюючи у дамара телицю за 10 пачок тютюну, мандрівник повинен був покласти на землю по пачці тютюну до кожного пальця дамара, що поклав руки на землю.

Цей приклад показує, що під час обміну не лічили, а встановлювали взаємну однозначність обмінювальних предметів.

Це був зручний спосіб обміну, але зручність застосовування натуральних чисел в практиці стала очевидна при досить розширеному натуральному ряді.

Наступним етапом у розвитку лічби є пальцева лічба. Пальцева лічба розширила натуральний ряд і відіграла у розвитку лічби таку ж, що й відкриття вогню для первісної людини.

Якщо назва числівника 2-ва пов’язувалась в різних народів з органами людини та тварин, то дальші назви чисел виникали у зв’язку з лічбою за допомогою пальців спочатку однієї, потім двох рук і, нарешті, пальців ніг. Так, щоб сказати "п’ять", індіанці деяких племен говорять: "руку закінчено", щоб сказати "шість", говорили "один з другої руки" і т.д., доки вистачає пальців. А ось німецький мовознавець А.Потт зазначав, що в деяких карибських племен Центральної Америки число 20 рівнозначне фразі: "Усі діти рук і всі діти ніг".

Якщо лічити потрібно було більш як за 20, то людина могла використовувати пальці рук і ніг ще декількох осіб. Ось, наприклад, у народів Південної Африки лічать й дотепер за допомогою двох-трьох чоловік, причому пальці кожного з людей відповідають певним розрядам (пальці одного є одиницями, другого десятками тощо).

Подальший розвиток суспільства виявив неспроможність пальцевої лічби простого встановлення рівнозначності задовольнити потреби людини вже в розширеному колі сукупностей, які підлягали лічбі. Тому для удосконалення методів лічби деякі народи почали лічити кілька разів підряд пальці рук (однієї або двох) чи з двох рук і ніг. Також легко лічити зарубки камінці, палички, якщо їх об’єднати в рівні групи. Отже це була лічба числами – сукупностями, що являла собою прообрази так званих вузлових, тобто чисел, що мають індивідуальні назви. Які не розкладаються на складові числівники один, два і т.д. Проте лічба числами - сукупностями не мала по сумі абстрактних чисел. Так, у туземців Флоріди слова: "па-куа" означають "10 яєць", "на-банар" – десять кошиків з їжею, але саме слово "на", яке б відповідало абстрактному числу 10, не вживається. Те ж саме спостерігається у туземців Західної Канади: слово "тха" означає "три речі", "тхане" – три особи, "тхат" – три роки, "тхатоен" – - у трьох місцях, а от слова, яке б означало абстрактне число 3, в цьому діалекті немає.

Отже, число було тісно пов’язане з множиною конкретних предметів. Тому найменованих чисел не було, це тому, що вміння лічити не було пов’язане з наявністю спеціальних найменувань.

Далі, в процесі нагромадження досвіду складалося уявлення про абстрактні числа, тобто, про незалежність кількісного результату від природи полічених предметів. Це свідчить про величезний стрибок у розвитку абстрактної свідомості людини. Про те, що, наприклад, один і два предмети утворюють три, незалежно від їх природи. Абстрактні числа були відправним пунктом для подальшого розширення та узагальнення поняття числа.

Наступним кроком на шляху пізнання поняття натуральних чисел було формування уявлення людини про натуральний ряд, як про нескінченний ряд чисел. Це був тривалий процес, оскільки тільки з відкриттям нескінченності ряду натуральних чисел деякими грецькими вченими (наприклад, Архімедом) була взагалі введена нескінченність в математику. Тому відкриття нескінченного ряду натуральних чисел є подвійним відкриттям. Це, по-перше, введення в математику поняття "нескінченний", по-друге, відкриття нескінченості ряду натуральних чисел. Те, що натуральних чисел необмежена кількість, довів великий давньогрецький вчений Архімед (287–212 рр. до н.е.). він знайшов спосіб побудови та словесного позначення як завгодно великих чисел, яке і виклав в своїй праці "Псамміт"

Далі залишилось тільки строго обґрунтувати поняття натурального числа. Але через те, що поняття натурального числа було дуже звичне і просте, й тому не було потреби довгий час обґрунтовувати це поняття через простіші. Тому строге обґрунтування поняття натурального числа відбулося тільки в 19 ст. В 1870 році Г.Кантором (1845–1918 рр.) на основі поняття множини та в 1891 році Пеано на основі аксіом, які тепер звуться аксіомами Пеано. При цьому елементи довільної множини N називають натуральними числами, якщо вони задовольняють такі аксіоми:

1) множина $N$ містить елемент 1;

2) для довільного $a \in N$ існує натуральне число, яке називають наступним за $a$ і позначає $a'$, причому, якщо $a = в$, то $a' = в'$;

3) якщо $a' = в'$, то $a = в$.

4). Яке б не було натуральне число $a \in N$, $a' \neq 1$.

5) Аксіома індукції. Нехай $M$ – частина множини $N$, така що $1 \in M$; якщо $a \in M$, то наступне число a′ теж належить $M$, тоді $M$ – рівнопотужне $N$.

### 2.1.3. ДРОБОВІ ЧИСЛА

Дроби виникли і розвивались в основному по двох напрямках. По-перше, вимірювання довжин, площ, об'ємів тощо. В процесі чого в людській свідомості зародилось і розвивалось уявлення про дріб, як частину цілого, конкретного предмету. Першим дробом, з яким познайомилась людина, була половина в її точно конкретній формі, саме у вигляді половини якого-небудь реального предмета. Другою, не менш важливою причиною виникнення дробів є уявлення про натуральні числа, що привело до виникнення уявлення і про частину одиниці, як про частини чогось цілого, нерозривного. Так, виникнення уявлення про число *2* (з часом) виникло уявлення про "половину", про "половину половини" і т.д. тобто з звичайного натурального числа n виникло, звичайно, не відразу, уявлення про дріб виду $1/n$, який тепер називають аліквотним, родовим або основним дробом.

Виникнення основних дробів в стародавній цивілізації зумовлено процесом поділу цілого на частини. Тому саме і виникли основні дроби 1/n при невеликих n (наприклад, при n = 3, 7, 6, 8); оскільки практично в той час навряд чи потрібно ділити ціле на велике число частин.

Як відомо, основні дроби виникли в Єгипті. Про це свідчить вже згаданий папірус Рінда. Ця стародавня математична пам'ятка починається таблицею. Яка виражає всі дроби виду 2/ 2k + 1, від k = 1 до k = 50 у формі суми не більш як чотирьох основних дробів не рівних між собою. Наприклад, дроби *2/3, 2/35,2/101*. В цій таблиці подаються основними дробами так:

$$\frac{2}{3}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6};\ \frac{2}{35}=\frac{1}{30}+\frac{1}{42};\ \frac{2}{101}=\frac{1}{101}+\frac{1}{202}+\frac{1}{303}+\frac{1}{606}.$$

У таблицях в інших папірусах пізніших часів дроби виду $2/k + 1$ розкладено на одні і ті самі основні дроби. Але залишається таємницею щодо вибору єгиптянами саме такого розкладу дробів. Також невідомо, як вони до нього дійшли. Проте безсумнівним є те, що дана таблиця - результат колективної праці багатьох поколінь. Те, що в таблицях немає звичайних дробів з парними знаменниками. Вказує на вміння єгиптян скорочувати дріб на *2*. Мабуть, за допомогою даної таблиці єгиптяни розв'язували більшість задач з дробами. Причому в своїх записах єгиптяни позначають основні дроби так само, як і натуральні числа, тільки з крапкою над позначенням натурального числа.

Отже, єгиптяни віддавали перевагу основним дробам, причому тільки їм, і тільки основні дроби мали для них самостійне значення та певний смисл.

Основні дроби міцно ввійшли в користування, тому довгий час інші дроби (звичайні) здавалися неправильними. Поняття дробу було розвиненим у ті далекі часи не тільки в Єгипті. Ще близько трьох тисяч років до нашої ери вавілоняни створили свою систему дробів, які отримали назву шістдесяткових дробів. Ці дроби нагадують наші десяткові, тільки замість знаменників 10, $10^2$,$10^3$ і т.д. Вавілоняни ставили 60, $60^2$, $60^3$ і т.д.

Користуючись своїми шістдесятковими дробами, вавілоняни зобов'язані були багато дробів зображувати наближено. Це є недоліком і,з другого боку, перевагою їх водночас. Ці дроби стали знаряддям наукових обчислень греків, потім арабських та середньовічних європейських вчених до 15 ст., поки їх не замінили десятковими дробами.

Далі вчення про дроби переміщується до Китаю та Індії. В цих країнах розвиваються звичайні дроби.

Перший поштовх для розвитку звичайних дробів відбувся в Китаї майже одночасно з натуральними числами задовго до від'ємних чисел. Першими дробами в них були 1/2, 1/3, 2/3, які звалися "половиною", "малою половиною" і "великою половиною". Китайські математики досить швидко вивчили звичайні дроби. Так, китайський математик Цзін Чоу-чан в середині першого століття дає скорочення дробів на основі так званого алгоритму Евкліда та показав, як виконуються дії над дробами. А ось індійські математики прагнули подавати всі частки за допомогою всього тільки шести основних дробів: 1/2, 1/4, 1/16, 1/40, 1/80, 1/960 і це їм, в більшості, вдавалося. Проте вже в індійського математика Брахмапутри (598 – близько 660 рр.) знаходимо досить розвинену систему дробів. В нього вже є дроби з будь-якими чисельниками та зустрічаються різні основні. Зазначимо, що в Індії було вже уявлення про додатні раціональні числа. Так, видатний індійський вчений Бхаскара (1114–1185 рр.) подавав цілі числа у вигляді дробу із знаменником 1.

Подальший крок у поглибленні знання про дріб був зроблений арабами. Так, в арифметичному трактаті Абул-Вафи (940–998 рр.) "Про те, що треба знати переписувачам з арифметики" знаходимо досить розгорнуту теорію дробів. Ан-Наасові, уродженець Наси (поблизу теперішнього Ашхабаду, при діленні дробів зводить їх до спільного знаменника:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{ad}{bd} \div \frac{bc}{bd} = \frac{ad}{bc}.$$

Звичайне обґрунтування звичайного дробу відбувається у Західній Європі. Так, німецький математик Іордан Неморій. (помер у 1236 році) виконує ділення дробу, уподібнюючи ділення множенню за допомогою ділення чисельника на чисельник і знаменника на знаменник. Для цього він члени першого дробу доповнює множниками:

$$\frac{a}{b} \div \frac{c}{d} = \frac{acd}{bcd} \div \frac{c}{d} = \frac{acd \div c}{bcd \div d} = \frac{ad}{bc}$$

В 15–16 ст.ст. вчення про дроби набуває по суті вже сучасного вигляду. Проте це вчення не було досить виразним. Тобто вчення про дробове число як про рівноправне з цілим, виникло в 16 ст. із розвитком арифметики, хоч уявлення про дріб сягає ще часів Вавилону і Єгипту. В 16–17 ст.ст. розроблюється схема додавання звичайних дробів та правило зведення до спільного знаменника. У 17 ст. дріб трактували і як зібрання рівних частин одиниці і як частину цілого числа, якщо вона не являється цілим числом, тобто звичайний нескоротний дріб. Наприклад, найвидатніший математик свого часу славетний Леонард Ейлер (1707–1783 рр.) писав: "Коли при діленні дільник й дільне перебувають в такому стані, що ділене число націло поділити не можна, то після ділення ще дещо залишається; тоді частка, яка показує, скільки разів дільник міститься в діленому, називається ламаним числом, або дробом."

Наступним етапом в розвиткові дробів було відкриття та введення, як в практичну, так і в наукову діяльність людини десяткових дробів. В Китаї вже в 2 ст. до н. е. була розвинена десяткова лічба, тому приблизно на той час у Китаї припадає використання десяткових дробів, які розглядали спочатку, як іменовані числа, які являлись одиницями десяткової системи мір, що згодом набули вигляду абстрактних десяткових дробів. Дещо пізніше тільки натяки на десятків дроби були в індусів потім у арабів, наприклад, у 952–953 рр. у трактаті "Книга розповідей про індійську арифметику" Ал-Ісуді подає ідею десяткових дробів. Щось подібне до десяткових дробів з'являється в ан-Наасаві при добуванні кореня, коли корінь не добувається націло. Але заслуга систематичного викладу десяткових дробів належить відомому самаркандському вченому Гіясу ал-Каші. У Європі першим спробував викласти систематично ідею десяткових дробів в середині 14 ст. французький математик з Тараскона Бен-якоб Бонфельє, але його твір був прочитаний тільки в наші дні.

В 15 ст. деякі математики при складанні тригонометричних таблиць вважали радіус кола рівним $10^6$ Або $10^7$ і отримали тригонометричні функції у десяткових дробах. Видатний французький математик Ф.Вієт (1540–1603 рр.) в своєму "Математичному каноні" користується, по суті, десятковими дробами, хоча ще і не дотримується єдиного позначення їх. Проте вперше почав застосовувати систематично десяткові дроби голландський математик і інженер Сімон Стевін. Через те, що зручність десяткових дробів зумовлена легкістю виконання арифметичних дій за правилами дій над цілими числами та простого порівняння їх.

В підручнику Оутреда (1574–1660 рр.) та французького математика Ерігона (17 ст.) обґрунтовується теорія десяткових дробів по суті на сучасному рівні. Коротке пояснення дій над десятковими дробами дає італійський математик Каваль'єрі (1598–1647 рр.), докладніше пишуть про ці дроби голландський математик і інженер А.Мецій (1571–1655 рр.) та знаменитий англійський математик Валліс.

Щодо періодичних десяткових дробів то поява їх в наукових працях датується 17 ст., а в навчальних посібниках – лише в 19 ст. Докладно дослідив періодичність десяткових дробів. Валліс в своєму творі "Алгебра" викладає кілька важливих властивостей десяткових дробів. По теорії періодичних десяткових дробів з'явилися численні дослідження лиш у другій половині 18 ст., де багато зробили німецькі математики Й. Ламберт (1728–1777 рр.) та швейцарець П.Бернулі (1720–1790 рр.), а також Л.Ейлер. Проте, найбільш систематичною була праця Ламберта. В ній за допомогою малої теореми Ферма він встановив зв'язок між теорією періодичних десяткових дробів та теорією чисел. Великий німецький математик К.Ф.Гаус розробив на початку 19 ст. повну теорію десяткових дробів у взаємозв'язку із дослідженнями в теорії чисел.

На закінчення коротко розповім про неперервні або ланцюгові дроби (ідея таких дробів полягає в тому, що чисельник може бути мішаним числом). Алгоритм утворення нескінченних дробів вже є, принаймні, у індійського математика Бхаскари. Вона міститься в праці "Вінець системи". Де він, по суті, раціональне число в нескінченний десятковий дріб (наприклад, раціональне число 0,5 розкладається в нескінченний десятковий дріб *0,4(9)*). Скінченні неперервні дроби розглянув німецький математик Швентр (1585–1636 рр.). Введення терміну "ірраціональний" в математику належить Валлісу. Хрістіан Г'югейнс пояснив як при допомозі неперервних дробів можна зводити важкі нескорочені дроби до легших чисел. Повна ж теорія неперервних дробів була створена найвидатнішими математиками свого часу Л.Ейлером та французьким математиком Ж.Лагранжем.

Отже, залишається тільки подати строгу теорію раціональних чисел (тобто, сукупностей та дробових чисел).

Позначимо упорядковану пару натуральних чисел через $(a, b)$, причому відношення рівності і порядку та операцій додавання і множення визначають так:

$$(a, b) = (c, d) \Leftrightarrow ad = bc;$$

$$(a, b) < (c, d) \Leftrightarrow ad < bc;$$

$$(a, b) + (c, d) = (a+c, b+d);$$

$$(a, b) \times (c, d) = (ac, bd).$$

Отже, можна встановити, що $(a, b)$ дорівнює $(a / b)$.

### 2.1.4. ВІД'ЄМНІ ЧИСЛА

Від'ємні числа ввели в взаємозв'язку з розвитком алгебри як науки. До від'ємних чисел приводили в деяких випадках вже рівняння першого степеня. Можливий від'ємний розв'язок в таких рівняннях можна було пояснити прикладами протилежних величин (протилежно напрямлені вектори, температура, нижча і вища від нуля). Додатні і від'ємні кількості вперше розглядали в Китаї, ще понад 2 тис. років тому. Так, у 8-й книзі збірника "Математика в 9-ти книгах" автори вільно користуються від'ємними кількостями. Додатні кількості в китайській математиці називали "чен", від'ємні – "фу". Їх зображали різними кольорами. "Чен" –- червоним, "фу" – чорним. Таким способом зображення користувались до середини 13 ст., поки Лі Є не запропонував зручніше зображення цих чисел – цифри, що зображали від'ємні числа перекреслювали рискою наскрізь справа наліво.

В 5-6 ст. від'ємні числа були введені індійцями. Тут ці числа знайшли систематичне застосування й тлумачили їх тоді так само, як це ми робимо тепер. Так, у творі Брахмагупти "Перегляд систем Брами" (628 р.) ми читаємо: "Майно й майно" є "майно", сума двох "боргів" є "борг". Якщо треба відняти "майно" від "боргу", то беруть їх суму. Про те, як відкрили від'ємні числа індійці, достовірно нічого невідомо. В зручності від'ємних чисел, мабуть, індійці переконались на практиці. Хоча й запровадили від'ємні числа індійські математики, проте не вважали їх рівноправними числами з іншими відомими їм числами.

У Європі до від'ємної кількості підійшов досить близько Леонардо Пізанський на початку 13 ст. Але по-справжньому застосовує ці числа французький математик Шюке в 15 ст. Так, в своєму трактаті "Наука про число" (1484 р.) він запроваджує від'ємні показники. Наприкінці 15 ст. німецький математик Відман впровадив сучасні позначення для додатних та від'ємних чисел із знаками "+" і "-". Голландський математик Жірар (1595-1632 рр.) визнавав право на існування від'ємних чисел. Він підкреслював, що введення цих чисел спрощує загальні теореми, розв'язання рівнянь.

Широкого застосування від'ємні числа набули після робіт Декарта і П.Ферма по створенню аналітичної геометрії. Від'ємні числа перестали бути "меншими від нічого", тобто з появою праць Декарта та Ферма по аналітичній геометрії, від'ємні числа набули рівних прав з додатніми числами.

В 15-17 ст.ст.. почалися суперечки щодо природи від'ємних чисел. Було висловлено ряд парадоксів. Так, наприклад, парадокс Арно: чи справджується пропорція 1: *(-1) = (-1)* : 1? Тут ліва і права частини пропорцій рівні, але перший і попередній член більший, а другий менший від наступного.

В 17-19 ст.ст. намагалися довести правила знаків під час множення від'ємних чисел, але безуспішно. Такі видатні вчені, як І. Ньютон (1642-1727 рр.), Ейлер і П. Лаплас та інші відстоювали об'єктивність поняття від'ємної величини. Але таки Даламбер і французький математик Л.Карно (1753-1823 рр.) вперто не погоджувались з ним. Переважна більшість російських математиків на чолі з Леонардо Ейлером розвивала теорію від'ємних чисел. Теоретично поняття від'ємного числа було обґрунтовано в 19 ст.

Строга побудова теорії відємних чисел здійснюється у вигляді пар додатніх дробів певної множини $A$ – $R$ – множина додатніх дробів. Домовимося упорядковану пару $(r, s)$ додатніх дробів $r$ і $s$ називати дробом. При цьому $(r,s) = (p,q) \Leftrightarrow r + q = s + p$.

Операції додавання й множення у множині дробів $R$ визначаються так:

$(r,s) + (p,q) = (r + p, s + q)$.

$(r,s)\ (p,q) = (rp + sq, rq + sp)$.

В результаті міркувань встановлюю, що $(r,s) = r - s$.

Отже, при $r < s$ цей дріб є від'ємним числом.

### 2.1.5. ІРРАЦІОНАЛЬНІ ЧИСЛА

Приблизно в 5 ст. до н.е. в піфагорійській школі (так названа в честь засновника великого давньогрецького математика Піфагора) було відкриті несумісні відрізки. Це відкриття привело античну математику до великої кризи. Те, що існують такі два відрізки, які не мають спільної, навіть як завгодно малої міри, було величезним ударом по самій піфагорійській школі з її ідеалістичними поглядами на число. До відкриття несумірності греки ділили розв'язуючи таку на перший погляд просту задачу: знаходження спільної міри між стороною та діагоналлю квадрату. Розв'язання даної задачі наведено в 10-й книзі "Начал" Евкліда. В сучасних позначеннях його зміст зводиться до наступного:

Нехай ABCD – квадрат, $|AC|$ - його діагональ, відношення сторони $|AB|$ до діагоналі $|AC|$ дорівнює відношенню двох цілих чисел m і n. Ці обидва числа не є парними, бо в протилежному випадку можливо було б скоротити дріб. Отже, $|AB| / |AC| = m/n$, а по теоремі Піфагора $n^2 = 2m^2$. Тому $n^2$ і з ним n-парні числа. Тоді m повинно бути непарним у загальному випадку. Але з того, що $n = 2k$ $(k \in N)$, випливає, що

$n^2 = 4k^2$ і тому $4k^2 = 2m^2$, тобто $m^2 = 2k^2$,

означає , що не існує такого раціонального числа m/n, квадрат якого дорівнює 2. Спочатку піфагорійці держали в таємниці це відкриття. Про це свідчить одна з легенд. Начебто Гіпас Метапонський, відкривший існування несумірності помер під час кораблекрушіння, був покараний за розголошення таємниці.

Після Гіпаса Теодор Кіренський в кінці 5 ст. зміг довести, що сторони квадратів з площами *3,5,7,8,10,11,12,13,14,15,17* квадратних одиниць, також несумісні з стороною одиничного квадрату, тобто, сучасною мовою, ірраціональні. Інший грецький вчений Театет, вислухавши Теодора, розв'язав загальнішу задачу, а саме, що $\sqrt{n}$ $(n \in N)$ ірраціональне, якщо $n$ не є точним квадратом. На жаль, давньогрецькі математики класичної епохи не зрозуміли повною мірою того, що їхні ірраціональні величини, є геометричною інтерпретацією цілком рівноправних чисел, з єдино відомими їм тоді числами, раціональними. Греки розробили теорію відношень таку, що враховувала можливість їх несумірності, і могли виконувати дії над ними в суто геометричній формі. Тому в грецькій математиці пізнього часу ми знаходимо раціональні наближення ірраціональних чисел. Так, в Герона Александрійського знаходимо:

$$\sqrt{63} \approx 7 + 1/2 + 1/4 + 1/8 + 1/16.$$

Стисло скажемо про дослідження ірраціональних чисел в Індії та на арабському Сході. Індійські математики, розвиваючи алгебру, тригонометрію і астрономію не могли обійтись без ірраціональних чисел. Тому ірраціональні числа вперше почали розглядати як числа нової природи в Індії. Індійці не задумувались: чи правомірно виконувати різні дії над ірраціональними числами. Так, індуський математик Бхаскара позбувається ірраціональності у знаменнику перемножаючи чисельник на ірраціональний множник. В нього зустрічаються вирази:

$$\sqrt{\sqrt{10} + \sqrt{24} + \sqrt{40} + \sqrt{60}} = \sqrt{2} + \sqrt{3} + \sqrt{5}$$

$$\sqrt{a+\sqrt{b}} = \sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}} + \sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}$$

Бхаскара, показуючи, як за двома даними сторонами прямокутника визначити третю, зауважує: "Якщо катети рівні, то гіпотенуза ірраціональна". В Індії дії над раціональними числами було перенесено і на ірраціональні.

Далі розвинули вчення про ірраціональні числа араби. Так, в трактаті Бану Муси "Книга про вимірювання плоских фігур" поняття дійсного числа (тобто множина раціональних та ірраціональних числе) має застосування до вивчення неперервних дробів. Великий азербайджанський математик Насардін ат-Тусі (1201–1274 рр.) трактує, як числа відношення несумірних величин:

"...кожне з цих відношень може бути назване числом, яке визначається одиницею так само. Як один з членів відношення визначається іншим з цих членів." Ще раніше в 12 ст. видатний перський математик і поет Омар Хайям теоретично розширює поняття числа до додатного дійсного числа.

У Західній Європі перша згадка про ірраціональні числа є і в Л. Пізанського. Проте тільки з розвитком в 15–16 ст. алгебри і тригонометрії ірраціональні числа ввійшли в європейську науку, без обґрунтування дій над цими числами. В той час математики мали справу тільки з геометричною інтерпретацією цих чисел, за межами якої ірраціональні числа були позбавлені певного окресленого змісту. Тобто математики
15–16 ст. по суті у інтерпретаціях ірраціональних чисел не пішли далі за греків. Застосовувати термін "ірраціональний" почав в 16 ст. англійський математик Брадвін (бл. 1290–1349 рр.), також тільки пов'язував поняття числа з цим терміном німецький математик М.Штіфель, хоч і не без впливу античної математики. Так, він вдається до відрізків в процесі доведення дій над цими числами.

Починаючи з 16 ст. і Європі починає швидко розвиватись алгебра. Тому до цього часу відноситься вже більш – менш чітке розрізнення цілих та дробових від ірраціональних чисел, що вже спостерігається у Кардано (1501–1576 рр.). Причому, до того часу відноситься використання в європейській науці раціональних наближень ірраціональних чисел. Але в той же час є ще математики, що не визнавали ірраціональних чисел, наприклад. Бомбеллі. Жірар, хоча вони і користувались ірраціональностями. Справжнє визнання ірраціональних чисел відбулося тільки після робіт П.Ферма та Р. Декарта по створенню нової математичної дисципліни – аналітичної геометрії (1637 р.), що привело до узагальнення поняття числа на рівні поєднання алгебри та геометрії. Потім після створення аналізу було введено поняття границі (Нютон), що дало змогу розглядати ірраціональні числа, як границю їх раціональних наближень. Це і особливо розробка обґрунтування арифметичних дробів, показало, що, як і звичайний дріб так і ірраціональний, можна подати нескінченним десятковим дробом наприклад, Валліс наголошував, що нескінченний десятковий періодичний дріб, що виникає іноді при добуванні коренів з раціональних чисел. Потрібно розглядати, як числа нової природи, тому що нескінченний десятковий дріб є звичайним дробом. Тому на початок 18 ст. математики, в основному, користувались тлумаченнями поняття ірраціональні числа, як кореня з раціональних чисел, коли результат добування кореня не є цілим числом чи раціональним дробом. Тобто це є алгебраїчне трактування ірраціонального числа. Як границі його раціональних наближень. Це трактування виникло у взаємозв'язку із створенням аналізу безкінечно малих. Тому обґрунтування арифметики ірраціональних чисел геометрично відкладається на задній план. З роботами Нютона і Лейбніца по створенню математичного аналізу ірраціональні числа починають застосовувати в природознавстві. В другій половині 18 ст. ірраціональні числа набули широкого визнання. П. Ейлер і Ламберт встановили, що періодичний десятковий дріб є раціональним числом, а неперіодичні тільки і тільки ірраціональним числом.

Далі в 19 ст. почали вивчати так звані алгебраїчні та трансцедентні числа. Алгебраїчні ірраціональні числа – це числа, що є коренями алгебраїчного рівняння:

$a_0x^n + a_1x^{n-1} + a_2x^{n-2} +\ldots+ a_{n-1}x + a_n= 0$, де (1) $a_0, a_1, a_2$ $a_n$ – цілі числа.

Приклади алгебраїчних ірраціональних чисел:

$\sqrt{a}$ $(a,b \in R)$, $x^n-a=0$; $\sqrt{a+\sqrt{b}}$ ; $2+\sqrt{11}$; $2-\sqrt{11}$; $x^2 - 4x - 7 = 0$.

В 1851 році французький математик Ліувіллі встановив існування трансцендентних ірраціональних чисел. Проте таких чисел встановив ще Л. Ейлер. Тобто таких ірраціональних чисел, що не є коренями ніякого алгебраїчного рівняння з цілими коефіцієнтами. В 1873 році Терміт(1856–1922 рр.) довів трансцендентність числа е:

$$(\lim_{n\to\infty}(1+1/n)^n = e)$$

У 1882 році німецький математик Ф.Ліндіман (1852 – 1939 рр.), скориставшись методом Ерліна, довів трансцендентність числа.

Теорія трансцендентних чисел розвивається в наш час.

Тепер перейдемо до строгої теорії дійсних чисел.

В цьому ж 19 ст., а саме в 1858 році, була побудована аксіоматично теорія дійсних чисел, німецьким математиком Р. Денікеном (1831 – 1916 рр.). своє відкриття Денікен виклав у творі "Неперервність та ірраціональні числа". Зазначимо, що побудову своєї теорії Денікен спирається вже на побудовану теорію раціональних чисел.

1. якщо $a > b$, $b > c$, то $a > c$.

2. якщо а, с – два різних числа, то існує безкінечно багато чисел між а, с.

3. якщо а є яке-небудь число, то воно розбиває всі числа множини *R* на два класи (підмножини) $K_1$ і $K_2$ так, що:

- кожне число множини R належить тільки одному із класів $K_1$ і $K_2$
- кожен із класів не являється порожнім
- кожне число одного з класів, скажемо, першого класу менше будь-якого числа другого класу.
- саме число а може бути віднесено або до першого класу, і тоді воно являється останнім, найбільшим в цьому класі, або до другого класу; в цьому випадку а буде першим, найменшим. Отже а замикає один і тільки один з класів. Даний розподіл множини чисел називається перерізом Дедекінди.

Число а називається "числом Дедекінда", отже третя властивість коротко формулюється так: будь-яке число множини R утворює на цій множині.

Порівнюючи множину R раціональних чисел із множиною такої ж прямої *L*, Дедекінд робить висновок, що останнє має ті ж властивості. Тобто:

1. якщо точка А передує точці В, а точка В передує точці *C*, то і *A* передує С;
2. якщо точки А і С – дві різні точки, то існує безкінечно багато точок між А і С;
3. будь-яка точка Д (названа "точкою Дедекінда") прямої розбиває всі точки останньої на два класи, задовольняючи перерахованим у пункті 3, тобто, утворює дедекіндовий переріз.
4. тепер установимо, що будь-якому раціональному числу можна поставити в відповідність одну точку прямої, і що це співставлення не є взаємно однозначним, тому що на прямій є безкінечна множина точок, котрі не відповідають ніяким раціональним числам. Дедекінд робить висновок. Що необхідно створити нові числа. Таким чином, щоб область чисел отримала ту ж неперервність, що й пряма лінія.

### 2.1.6. КОМПЛЕКСНІ ЧИСЛА

Комплексні числа історично виникли вже в 16 ст. з потреб швидко прогресуючої алгебри. Але, безсумнівно, з цими числами зустрілись значно раніше в Індії при розв’язуванні квадратних рівнянь.

Перша згадка про комплексні числа є в італійського математика Д. Кардано, а саме в його книжці "Велике мистецтво або правила алгебри"(1545 р.). в цій книжці були опубліковані загальні способи розв’язування рівнянь 3-го і 4-го степеня. Причому формула для розв’язання кубічного рівняння$x^3 + px + q = 0$;

$$\left( x = \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} \right)$$

До якого зводиться розв’язання загального кубічного рівняння. Не була придатна для користування при від’ємному значенні підкореневого виразу в квадратному радикалі, що входить в загальну формулу. Це так званий незвідний випадок. Але в незвідному випадку рівняння має три дійсні кореня. Цей факт Кардано пояснити не зміг. Проте він вказав, що при деяких умовах комплексні числа можна вважати коренями квадратних рівнянь. Він виходить з задачі: "Поділити число 10 на дві частини, добуток яких дорівнює 40". Ця задача зводиться до розв’язання рівняння

$x^2 - 10x + 40 = 0$, коренями якого є: $5+\sqrt{-15}$; $5-\sqrt{-15}$.

Тепер Кардано припускає, що дії над комплексними справедливі, як над дійсними числами і також перший має:

$\sqrt{-15}\times\sqrt{-15}=-15$, то $5+\sqrt{-15}$ і $5-\sqrt{-15}$

дійсно задовольняють умовам задачі.

В своїй "Алгебрі" Бомбеллі намагався пояснити незвідний випадок і показав, що кожний з доданків в формулі Кардано є спряженими комплексними числами.

Пізніше французький математик Ф.Вієт (1540–1603 рр.) відкрив тригонометричний розв'язок кубічного рівняння в незвідному випадку.

В 18 ст. комплексні числа знайшли свою тригонометричну формулу. Так. Англійський математик Муавр (1667–1754 рр.) відкрив формулу:

$(\cos\alpha + i\sin\alpha)^n = \cos n\alpha + i\sin n\alpha$, де $n \in N$

Пізніше Ейлер наводить у своєму "Вступі до аналізу" дану формулу у сучасному вигляді. Ця ж формула дала змогу находити корені n-го степеня з комплексних чисел. Зауважимо, що символ "і" був введений Ейлером для позначення $\sqrt{-1}$.

На захист об'єктивності поняття уявної величини виступив в першій половині 18 ст. німецький математик Г.Кюн (1690–1769 рр.). Як і Валліс, Кюн прагнув встановити реальний смисл комплексних чисел і ні він, ні Валліс не прагнули перенести правила дій над дійсними числами на комплексні числа. Початок систематичного використання та зв'язування справжньої ролі комплексних чисел в математичному аналізі пов'язано з працями Л.Ейлера і Даламбера. В 1743 р. Ейлер відкриває основне співвідношення, яке пов'язує показникову і тригонометричну функції:

$e^{xi} = \cos x + i\sin x$.

У "Вступі до аналізу" (1748 р.), виходячи з формули Муавра, він вивів ще дві формули, які і названо його ім'ям.

$$\cos x = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}; \quad \sin x = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2}.$$

В праці "Міркування про загальну природу вітрів" (1749 р.) Даламбер встановив основні свої результати при допомозі формул Ейлера. Він також уперше почав розглядати функції комплексного аргументу. Так, він хотів довести, що для будь-яких комплексних чисел $a + bi \neq oi; c + di \neq 0$ існують дійсні числа $A$ і $B$, такі, що:

$(a+bi)^{c+di} = A + Bi$.

В 50-х роках 18 ст. у працях Даламбера і Ейлера з гідродінаміки комплексні числа $a + bi$, подаються як точки площини з координатами (a; b).

Отже, до кінця 18 ст. математики вивчили основні властивості комплексних чисел. У 19 ст. комплексні числа починають відігравати важливу роль в науці і техніці. Також в 19 ст. знаходять геометричну інтерпретацію комплексних чисел. Так, у 1806 р. французький математик Арган (1768–1822 рр.) дав геометричне тлумачення комплексних чисел. Хоча ще в 1799 р. датський математик Г.Вессаль (1745–1818 рр.) дав геометричне тлумачення комплексних чисел як векторів на площині. Проте після того, як працю Аргана "Досвід зображення уявних чисел за допомогою геометричних побудов" в 1813–1815 рр. було опубліковано з аналогічною працею французського математика Франсе, поччалась суперечка, щодо піднятих в цих працях питань. Але тільки в 30-х роках 20-го ст. після мемуару Гауса "Теорія біквадратних залишків" (1831 р.) комплексні числа почали розглядати як точки або вектори на площині. Також в цій праці Гауса вводяться терміни "комплексне число" і "норма комплексного числа $a+bi$" (тобто вираз $a^2+b^2$).

З цього часу зникає недовір'я до комплексних чисел і вони починають відігравати важливу роль у математиці. Так, наприклад, усі сучасні розрахунки гребель, ракет, літаків тощо роблять за формулами теорії функцій, аргумент яких набуває комплексних значень.

Побудова строгої теорії комплексних чисел здійснюється в такій послідовності: комплексним числом називають упорядковану паузу дійсних чисел $a$ і $b$, і записують це так: $(a; b)$. При цьому

$(a; b) = (c; d) \Leftrightarrow a = c; b = d.$

Операції додавання і множення визначаються так:

$(a; b) + (c; d) = (a + c; b + d);$

$(a; b) \times (c; d) = (ac - bd; ad + bc).$

Такі операції комутативні, асоціативні і оборотні.

Ототожнюючи комплексне число (a; 0) з дійсним a: (a; 0) = a, включаємо множину дійсних чисел D в множину комплексних чисел К. Тепер, якщо комплексне число (0; 1) позначити буквою $i$:

$i = (0; 1)$, то $i^2 = (0; 1) \times (0; 1) = (-1; 0) = -1$, тобто $i^2 = -1$.

Тільки після цього можна вважати, що $i = \sqrt{-1}$. При цьому довільне комплексне число (a; b)можна подати у вигляді $(a; b) = a + bi$.

Комплексні числа $a - bi$ і $a + bi$ називаються спряженими один відносно одного. Модуль комплексного числа z дорівнює:

$|z| = \sqrt{z \cdot \bar{z}} = \sqrt{a^2 + b^2}$, (де $a$ і $b$ – дійсні числа).

Комплексні числа в 19 ст. були узагальнені до гіперкомплексних систем n-ного порядку, тим самим набув завершеності один з напрямів розвитку поняття числа: натуральні числа $\to$ дробові числа $\to$ від'ємні числа $\to$ ірраціональні числа $\to$ комплексні числа $\to$ побудова гіперкомплексних систем.

Так, наприклад в 1843 р. англійський математик Гамільтон спромігся узагальнити комплексні числа до гіперкомплексних 4-го порядку (комплексні мають 2-й порядок), так званих кватертітів, до яких ми ще повернемось при розгляді проблеми Варінга.

### 2.1.7. ОСТАЧІ.

**Теорема.** Для будь – яких двох цілих чисел a і b ( b > 0 ) існує пара чисел q і r, притому едина, така , що

a = bq + r, 0 < r < b(1)

**Доведення.**

Якщо a ⋮ b, то r = 0. Нехай b не ділиться на a: розглянемо числа : b1, b2, b3, ………

За умови a $\geq 0$, серед усіх чисел виберемо ті, які перевищують a. Найменьше з них позначимо через b$q'$. Позначимо через q число, яке на одиницю менше, ніж $q'$; тоді

q + 1 = $q'$ і bq < a < b( q+1)

bqa b( q + 1)

Позначивши через r різницю a-bq, з попередньої нерівності одержемо

r = a- bq < b ( q+ 1) – bq = b, r > 0,

a отже ,

a=bq+ r , 0 < r < b.

Якщо a < 0, то згідно з щойно доведеним твердженням

| a | = bq + r, 0 < r < b,

a= b( - q) – r = $\underbrace{(-q-1)}_{q_1}$ + $\underbrace{b-r}_{r_1}$ =b, 0< b – r < b.

Доведемо тепер единність таких чисел q і r. Припустимо, що

a = bq + r, 0 $\leq$ r < b

a= bq1 + r1, 0 $\leq$ r1 < b.

Тоді

bq + r = bq1 + r1,

b( q – q1 ) = r1 –r

але

| r1 – r | < b.

Дійсно, додавши нерівності

0 $\leq$ r < b

- b < - r1 $\leq$ 0.

Одержимо

- b < r –r1 < b.

Оскільки b ділиться на

$r1 - r$ і

$| r1 - r | < b$,

то

$r1 - r = 0$

тобто

$r1=r$

Тому $b ( q - q ) = 0$, а оскільки $b \neq 0$, то $q - q1 = 0$, тобто $q = q1$

Теорема доведена.

Число $q$ називають часткою, число $r$ – остачею при діленні $a$ на $b$.

Іноді замість рівності ( 1 ), доцільно використовувати іншу форму запису числа $a$ . Перепишемо праву частину рівності ( 1 ) так:

$a = bq + r = b ( q + 1 ) - b + r = b( q + 1 ) - ( b - r ) = mb - r1$

Отже,

$a = mb - r1, 0 < r1 \leq b$ ( 2 )

якщо

$a < b, q = 0, r = a$

**Приклад 1.**

Довести, що різниця $n^5 - n \,\vdots\, 5$ при будь- якому $n \in N$. Дійсно, число $n$ або ділиться на 5, або дає при діленні на 5 одну з остач 1, 2, 3, 4.

Якщо маємо остачі 1 та 4, то згідно ( 2 ) число $n$ можна подати у вигляді $n = 5k \pm 1$, де $k \in N$ ; аналогічно, якщо число дає в остачі 2 або 3, то воно набуває вигляду $n = 5k \pm 2$. Якщо $n$ ділиться на 5, то $n^5$ ділиться на 5.

Якщо $n = 5k \pm 1$, то $n^2 = ( 5k \pm 1)^2= 5 ( 5k^2 \pm 2k) +1$

Якщо $n = 5k \pm 2$, то $n^2 = ( 5k \pm 2)^2 = 5 ( 5k^2 \pm 4k +1 ) - 1$.

Таким чином, якщо $n$ не ділиться на 5, то число $n^2$ набуває вигляду

$5L \pm 1$,

$n^4 = ( 5L \pm 1)^2 = 5 ( 5L^2 \pm 2L) + 1= 5M +1$,

де $L, M$ – деякі натуральні числа.

Отже, різниця $n^4 - 1$ ділиться на 5, а це водночас означає, що й число $n^5 - n = n ( n^4 - 1$ ділиться на 5.

**Приклад 2.**

Довести, що різниця квадратів двох цілих чисел, які не діляться ні на 2, ні на 3 кратна 24.

Нехай a, b – два числа, які задовольняють умову задачі. З ‘ясуємо, які значення можуть приймати остачі від ділення цих чисел та їх квадратів на 24.

Згідно ( 1 )

$a = 24q + r, 0 \leq r < 24.$

Оскільки a не кратно ні 2, ні 3, то r може набувати таких значень, 1, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, або згідно ( 2 )

$a = 24m \pm 1$

$a = 24m \pm 5$

$a = 24m \pm 7$

$a = 24m \pm 11.$

Легко перевірити, що у всіх випадках остача від ділення $a^2$ на 24 дорівнює 1, тобто

$a^2 = 24L + 1.$

Аналогічно,

$b^2 = 24M + 1.$

Тоді,

$a^2 – b^2 = 24( L – M ),$

а отже

$( a^2 – b^2 ) \vdots 24.$

## 2.1.8. КОНГРУЕНЦІЇ ТА ЇХ ЗАСТОСУВАННЯ .

При розглядувані попередніх прикладів ми фактично замінювали числа іншими, які мали ту ж саму остачу при діленні на відоме число. Так числа 2, $2^2$, $2^3$, ... , $2^{100}$ замінили числами – 1, 1, -1, ... , 1.

Скажімо, числа $2^3$ і –1 можна порівняти в тому розумінні, що при діленні на 3 вони дають одну і ту ж остачу –1. Те саме можна сказати і про числа $2^4$ та $2^{100}$. Їх також можна порівняти в тому самому розумінні, що і числа $2^3$ та –1, оскільки при діленні на 3 вони дають одну і ту ж саму остачу.

**Означення.** Нехай m > 1 – ціле число. Цілі числа $a \pm b$ називаються конгруентними, або порівнюваними за модулем m, якщо вони при діленні на m дають однакові остачі.

Позначення: $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$

Інакше кажучи, числа a і b порівнювані за модулем m, якщо їхня різниця ділиться на m, тобто існує таке ціле число q, що a =b=mq.

Зазначимо деякі властивості конгруенцій:

1. $a \equiv a(\operatorname{mod} m)$ - рефлексивність;

2. якщо $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$, то $b \equiv a(\operatorname{mod} m)$ - симетричність;

3. якщо $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$, то $b \equiv c(\operatorname{mod} m)$, то $a \equiv c(\operatorname{mod} m)$ - транзитивність;

4. якщо $a_1 \equiv b_1(\operatorname{mod} m)$, то $a_2 \equiv b_2(\operatorname{mod} m)$, то $a_1 \pm a_2 \equiv b_1 \pm b_2(\operatorname{mod} m)$;

5. якщо $a_1 \equiv b_1(\operatorname{mod} m)$, $a_2 \equiv b_2(\operatorname{mod} m)$, то $a_1 \cdot a_2 \equiv b_1 \cdot b_2(\operatorname{mod} m)$;

6. якщо $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$, то $a^n \equiv b^n(\operatorname{mod} m)$, де n- довільне натуральне число;

7. нехай f (x) – многочлен з цілими коефіцієнтами, a і b –змінні, які набувають цілих значень. Тоді, якщо $a \equiv b(\operatorname{mod} m)$, то $f(a) \equiv f(b) \cdot (\operatorname{mod} m)$ .

Властивості 1 – 5 легко довести, виходячи з означення. Доведемо, наприклад, властивості 4 –5.

$(a_1+a_2)$- $(b_1+b_2)$ = $(a_1-b_1)$+ $(a_2 - b_2)$.

Якщо $a_1$-$b_1$ та $a_2$-$b_2$ діляться на m, то й число $(a_1+a_2)$- $(b_1+b_2)$ ділиться на m;

$$a_1 \cdot a_2 - b_1 \cdot b_2 = a_1 \cdot a_2 - a_1 \cdot b_2 + a_1 \cdot b_2 - b_1 \cdot b_2 = a_1 \cdot (a_2 - b_2) + b_2 \cdot (a_1 - b_1).$$

Оскільки числа $a_1$-$b_1$ та $a_2$-$b_2$ діляться на m, то число $a_1a_2$-$b_1b_2$ ділиться на m.

Властивість 6 можна довести, виходячи з властивості 5 з застосуванням методу математичної індукції.

Зауважимо, що з властивостей 1-3 випливає, що відношення порівняння є в деякому розумінні рівність, а саме: “рівність в відношенні остач при діленні на m”. Нарешті, доведемо властивість 7.

Нехай

$$f(x) = C_n x^n + C_{n-1} x^{n-1} + \cdots + C_1 x + C_0,$$

$C_k$ – дійсні числа ( k =0, 1, … , n). За властивістю 6

$$a^k \equiv b^k(\operatorname{mod} m), k = 0,1,2,\ldots,n.$$

Позначимо обидві частини кожного з одержаних n + 1 порівнянь на $C_к$ . Одержимо згідно з властивістю 1

$$C_k a^k \equiv C_k b^k (\mathrm{mod}\, m), k = 0,1,2,\ldots, n$$

Додаючи останні порівняння на основі властивості 4 остаточно одержимо

$$f(a) \equiv f(b) \cdot (\mathrm{mod}\, m)$$

Метод порівнянь є зручним і ефективним при розв'язуванні задач на подільність.

**Приклад 1.**

Знайти остачу від ділення $5^{20}$ на 24.

$$5^{20} = (25)^{10},$$
$$25 \equiv 1(\mathrm{mod}\, 24)$$

За властивістю 6

$$(25)^{10} \equiv 1^{10} (\mathrm{mod}\, 24) \Leftrightarrow 5^{20} \equiv 1(\mathrm{mod}\, 24)$$

Отже, число $5^{20}$ при діленні на 24 дає в остачі 1.

## 2.2. ПЛАН ПРОВЕДЕННЯ ПРАКТИЧНОЇ ЧАСТИНИ ЗАНЯТТЯ:

- Ознаки подільності на числа :19,21,29,31,39,41,49,51.
- Задачі на остачі
- Задачі на арифметичне застосування теорії конгруенцій.

### 2.2.1. ОЗНАКИ ПОДІЛЬНОСТІ НА ЧИСЛА :19,21,29,31,39,41,49,51.

Як бачимо мова йде про ознаки подільності на числа ,які закінчуються на 9 та 1 ,тобто числа вигляду $10^{n\pm1}$. Будемо розглядати задачу в загальному вигляді .Нехай треба встановити ,за яких умов число

$N = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_0} = \overline{\overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1} \cdot 10 + a_0} = 10a + a_0$ ділиться на $10^{n-1}$Побудуємо число $N_1=a+na_0$,тобто до числа ,що залишиться від даного ,якщо підкреслити його останню цифру ,додамо останню цифру числа N помножену на число n.

Розглянемо різницю

$nN-N1=n(10a+a_0)-(a+na_0)=10na+na_0-a-na_0=(10n-1)a$

Отже , $nN-N_1=(10n-1)a$

Як бачимо різниця $nN-N_1$ ділиться на 10n-1.

Тому ,якщо N ділиться на 10n-1, то і $N_1$ ділиться на 28

10n-1. Якщо ж $N_1$ ділиться на $10^{n-1}$,то n N = N $_1$+($10^{n-1}$)a ділиться на $10^{n-1}$, а отже

і N ділиться на $10^{n-1}$.

З наведених міркувань випливає ознака подільності на $10^{n-1}$. Відкидаємо від

числа N останню цифру $a_0$ та домножаємо її на n ; потім до числа, яке утворилось з N відкидання останньої цифри, додаємо число $na_0$. Якщо

продовжуючи ці дії, матимемо в результаті $10^{n-1}$, то дане число N ділиться

на $10^{n-1}$.

Зокрема, поклавши n= 2,3,4,5, одержимо ознаки подільності на 19,29,39,49.

нехай треба встановити, чи ділиться число 51623 на 19. Маємо виконати, згідно з ознакою, наступні операції:

1. 51623 , $3 \cdot n = 3 \cdot 2 = 6$; $\longrightarrow$

2. 5162+6 =5168 , $8 \cdot 2=16$; $\longrightarrow$

3. 516+16 = 532 ,$2 \cdot 2 =4$; $\longrightarrow$

4. 53+4 = 57, 7 2=14; $\longrightarrow$

5. 5+14 =19.

Отже, 51623 ділиться на 19. Звичайно, можна в цій процедурі обмежуватись і меншим числом кроків, а саме зупинятися в той момент, коли неважно встановити безпосереднім обчисленням подільність на 19.

З міркувань, аналогічних до наведених вище, випливає така ознака подільності на 10n+1.

Нехай треба встановити, чи ділиться дане число N на 10n+1. Відкинемо від даного числа N останню цифру. Далі від числа, яке утвориться, віднімемо число, яке дорівнює добутку останньої цифри числа N на n. Від здобутого числа

Відкидаємо останню цифру і від числа, яке утворилося віднімаємо число, яке дістанемо від множення відкинутої цифри на n. Якщо, продовжуючи ці дії ,ми дістанемо нуль, то дане число N ділиться на 10n+1. Вказану процедуру

можна завершувати і раніше, якщо здобуте на деякому кроці число вочевидь

ділиться на 10n+1, або легко перевірити, що воно ділиться на 10n+1.

В попередніх прикладах ми для відповіді на питання про подільність даного числа N на деяке число m, зверталися до розгляду декількох останніх цифр числа.

Разом з тим, цікавими з практичної точки зору є ознаки, які вимагають розгляду всіх цифр досліджуваного числа. Такими є широко відомі ознаки подільності на 9 та 11:

А) число N ділиться на 9 тоді і тільки тоді, коли сума його цифр ділиться на 9;

В) число N ділиться на 11 тоді, і тільки тоді, коли різниця між сумами його цифр, що стоять на парних і непарних місцях, ділиться на 11.

До речі, для n=1 ці ознаки випливають із попереднього прикладу. Доведення цих ознак можна також легко отримати, виходячи з властивостей порівнянь. Дійсно, у випадку а) маємо:

$N=a_n\cdot 10^n + a_{n-1}\cdot 10^{n-1} + \ldots + a_1\cdot 10 + a_0$.

Оскільки $10^n \equiv 1 \pmod 9$, то за властивістю 7)

$N = f(10) \equiv f(1) \pmod 9$, або $N \equiv (a_n + a_{n-1} + \ldots + a_0) \pmod 9$

У випадку б): $100 \equiv 1 \pmod{11}$, отже, $10^{2k} \equiv 1 \pmod{11}$, або $10^m \equiv 1 \pmod{11}$, якщо ж

$M=2k+1$,то$10 \equiv (-1) \pmod{11}$, а отже $10^{2k+1} \equiv (-1) \pmod{11}$,або $10^m \equiv (-1) \pmod{11}$,

Якщо $m=2k+1$.Об'єднуючи обидві випадки, маємо $10^n \equiv (-1)^n \pmod{11}$.Тоді за властивістю 7) одержуємо

$N= f(10) \equiv f(-1)$,або

$N \equiv a_n(-1)^n + a_{n-1}(-1)^{n-1} + \ldots + a_2 - a_1 + a_0 \pmod{11}$.

Отже, $N \equiv ((a_0+a_2+a_4+\ldots)-(a_1+a_3+\ldots)) \bmod 11$.

Оскільки числа 9 та 11 взаємно – прості, то знаючи ознаки подільності на 9 та 11

Можна встановити подільність числа на 99. А чи існує ознака подільності на 99

Якою можна було б користуватися безпосередньо? Відповідь на це питання позитивне.

Дійсно, оскільки $100^n \equiv 1 \pmod{99}$, то при n=2k число

$N = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_3 a_2 a_1 a_0}$ можна подати у вигляді

$$N = a_n 100^{\frac{n}{2}} + \overline{a_{n-1}a_{n-2}} \cdot 100^{\frac{n-2}{2}} + \cdots + \overline{a_3 a_2} \cdot 100 + \overline{a_1 a_0} = a_n(100^{\frac{n}{2}} - 1) + \overline{a_3 a_2}(100-1) + a_n +$$
$$+ a_n + \overline{a_{n-1}a_{n-2}} + \cdots + \overline{a_3 a_2} + \overline{a_1 a_0}$$

Якщо ж n=2k+1, то

$$N = \overline{a_n a_{n-1}} \cdot 100^{\frac{n-1}{2}} + \overline{a_{n-2}a_{n-3}} \cdot 100^{\frac{n-3}{2}} + \cdots + \overline{a_3 a_2} \cdot 100 + \overline{a_1 a_0} = \overline{a_n a_{n-1}} \cdot 100^{\frac{n-1}{2}} +$$
$$+ \overline{a_{n-2}a_{n-3}}(100^{\frac{n-3}{2}} - 1) + \cdots \overline{a_3 a_2}(100-1) + \overline{a_n a_{n-1}} + \overline{a_{n-2}a_{n-3}} + \cdots \overline{a_3 a_2} + \overline{a_1 a_0}$$

З останніх рівностей випливає, що число

$N = \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_1 a_0}$ при діленні на 99 дає ту саму остачу, що й число

$A_1 = a_n + \overline{a_n a_{n-1} \cdots a_3 a_2 + a_1 a_0}$

якщо n- парне і ту саму остачу,що й число

$A_2 = \overline{a_n a_{n-1}} + \overline{a_{n-2} a_{n-3}} + \cdots + \overline{a_3 a_2} + \overline{a_1 a_0}$ ,якщо n- непарне.

Тому, для того, щоб встановити,що дане число N ділиться на 99 треба скористатись таким правилом:

1)Розбити дане число справа наліво на грані, по дві цифри в кожній( крайня ліва грань може бути неповною, тобто містити одну цифру);

2)утворені таким чином двозначні числа додати;

3)якщо одержане у такий спосіб число $A_1$($A_2$) ділиться на 99, то й число N буде

ділитися на 99.

Оскільки $100^n \equiv (-1)^n \pmod{101}$, то міркуючи аналогічно одержимо наступну ознаку подільності N на число 101.

Число N при діленні на 101 дає ту саму остачу , що й число

$B = \left|(\overline{a_1 a_0} + \overline{a_5 a_4} + \cdots) - (\overline{a_3 a_2} + \overline{a_7 a_6} + \cdots)\right|$

Таким чином, щоб перевірити, чи ділиться N на 101 треба:

1)розбити дане число справа наліво на грані по дві цифри;

2)окремо додати числа, що відповідають парним та непарним граням ( перші дві цифри справа утворюють першу грань, наступні дві – другу і так далі );

3)розглянути модуль різниці одержаних сум. Якщо одержане у такий спосіб число B ділиться на 101, то й число N буде ділиться на 101.

Для одержання ознак подільності числа N на 9 та11 ми фактично розбивали його на грані, кожна з них містила одну цифру. Для одержання ознак подільності числа N на 99 та 101 ми розбивали число N справа наліво на грані, кожна з яких містила по дві цифри. Природньо піти по такому самому шляху для встановлення ознак подільності числа на 999 та1001, а саме: розбивати число N справа наліво на грані, кожна з яких містить по три цифри. Тоді, прийнявши до уваги порівняння

$1000^n \equiv 1 \pmod{999}$ , $1000^n \equiv (-1)^n \pmod{1001}$,

діючи у такий самий спосіб , як і в попередніх випадках, легко обґрунтувати наступні ознаки подільності числа N на 999 та 1001.

Число N розбити на грані справа наліво, по 3 цифри в кожній грані. Додати всі грані . В результаті одержимо число, що при діленні на 999 має таку саму остачу, як і число N.

Якщо ж додати всі грані, що стоять на непарних місцях, відлічуючи справа, і відняти всі грані, що стоять на парних місцях, то в результаті дістанемо число, яке при діленні на 1001 має таку саму остачу, як і число N.

Оскільки $999=27\cdot37$, а $7\cdot11\cdot13$, то одержані вище ознаки подільності на 999 та 1001 одночасно є ознаками подільності на 27, 37, та 7, 11, 13.

## 2.2.2. ЗАДАЧІ НА ОСТАЧІ.

**Приклад 1.**

Знайти остачу від ділення числа n на 30, якщо відомо, що остача від ділення n на 15 дорівнює 7, а остача від ділення n на 6 дорівнює 4.

Згідно з ( 1 ) число додаємо у вигляді

$n = 30q + r,\ 0 \le r < 30.$

Для відшукання невідомого запишемо число ще так.

$n = ( 30q + ( r – 7 )) + 7.$

Оскільки n при діленні на 15 дає остачу 7, то число ,

$( 30q + ( r – 7 )) \vdots 15$

а отже

$( r - 7) \vdots 15$

і може набувати значень з проміжку$-7 \le r – 7 < 23.$

Серед цілих чисел ( - 7, -6, ….. , 0, 1, ….. , 22) на 15 діляться лише два : 0 і 15. Тому , = 7, =22.

Якщо r = 7, то

$n = 30q + 7,$

або

$n = 6( 5q + 1) + 1 = 6L + 1,$

тобто в остачі при діленні на 6 дає 1.

Якщо r = 22, то

$n = 30q + 22$ або $n = 6( 5q + 3 ) + 4 = 6M + 4$

Отже, r = 22.

Якщо в задачах на подільність мова йде про числа, записані за допомогою степенів. То доцільно слідкувати за тим, які остачі дають при діленні на те чи інше число послідовні степені основи. Остачі будуть періодично повторюватись. Якщо період знайдемо, то цім самим легко можна становити остачу від ділення такого числа, навіть у випадку високих показників степеню. Крім того, якщо маємо число в вигляду $a^n$ , де a – натуральне, то останні цифри чисел a, $a^2$, $a^3$, … , $a^n$, … періодично повторюються.

**Приклад 2.**

Знайти остачу від ділення числа

A = $2 + 2^2 + 2^3 + \ldots + 2^{100}$ на3.

$$\frac{2}{3} = 1 + \frac{(-1)}{3};\ \frac{2^2}{3} = 1 + \frac{1}{3};\ \ \frac{2^3}{3} = 3 + \frac{(-1)}{3};\ \frac{2^4}{3} = 5 + \frac{1}{3}, \ldots$$

Отже, маємо остачі

$r_1 = -1$, $r_2 = 1$, $r_3 = -1$, $r_4 = 1$, …

Помічаємо, що парні степені числа 2 при діленні на 3 дають остачу, яка дорівнює 1. Непарні степені числа 2 дають при діленні на 3 остачу, яка дорівнює – 1. Сума остач дорівнює 50( + 1) + 50( - 1 )=0

Тому остача від ділення числа A на 3 дорівнює 0, тобто число A ділиться на 3.

**Приклад 3.**

Довести, що число $43^{43} - 17^{17}$ ділиться на 10.

Зрозуміло, що якщо останні цифри чисел $43^{43}$ та $17^{17}$ однакові, то число 43 – 17 буде кратне 10. Доведемо, що це саме так.

Будемо слідкувати за останніми цифрами чисел $3^n$ та $7^n$.

$3^0 = 1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$, $3^3 = 27$, $3^4 = 81$, ……..

отже, останні цифри чисел $3^n$ утворюють послідовність: 1, 3, 9, 7, 1, 3, 9, ….

Як бачимо, цифри в цій послідовності періодично повторюються з періодом T = 4. Тому числа вигляду $3^{4k}$ мають останньою цифрою 1,

$3^{4k+1} \to 3$, $3^{4k+2} \to 9$, $3^{4k+3} \to 7$ де k = 0, 1, 2…..

Оскільки, 43 = $4^k$ + 3, де =10, то число $43^{43}$ закінчується на 7. Іншими словами, знаючи період появи останньої цифри, досить розглянути остачу, яка дає показник степеню при діленні на період T.

Аналогічно встановлюємо, що період появи останньої цифри чисел $7^n$, де = 0, 1, 2, … , дорівнює також 4. Оскільки, 17 = 4m + 1, то останньою цифрою числа $17^{17}$ буде 7.

**Приклад 4.**

Довести, що число $3^{1986} + 5^{1986}$ ділиться на 13. Будемо слідкувати за тим, які остачі дають степені 3 та 5 при діленні на 13, = 0, 1, 2, 3, … , .

Складемо таблицю значень.

| N | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | … |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $r_n$ | 1 | 3 | 9 | 1 | 3 | … |
| $r_n'$ | 1 | 5 | 12 | 8 | 1 | … |

Отже, $T_1$ період, з яким з'являються остачі числа $3^n$ при діленні на 13 в процесі зміни значеннь n , дорівнює трьом.

Аналогічно, $T_2$ - період, які утворюють остачі від ділення чисел $5^n$ на 13 , дорівнює 4 . Оскільки $T_1 = 3$, то $T_2 = 4$ , то

$r_{1986} = r_0 = 1$

$r'_{1986} = r'_2 = 12$

Сума остач дорівнює 13, тому число $3^{1986} + 5^{1986}$ ділиться на 13. Зауважимо, що якщо число $a^n$ при діленні на b дає остачу $r_n$, то для того, щоб одержати остачу $r_{n+1}$ від ділення $a^{n+1}$ на b, досить знайти остачу числа $ar_n$ при діленні на b.

Наприклад, $r_2' = 12$, тоді $5 \cdot r_2' = 5 \cdot 12 = 60$

Поділемо 60 на 13, в остачі одержимо 8. Отже, $r_3' = 8$.

## 2.2.3. ЗАДАЧІ НА АРИФМЕТИЧНЕ ЗАСТОСУВАННЯ ТЕОРІЇ КОНГРУЕНЦІЙ.

**Приклад 1.**

Знайти останню цифру натурального числа $A = 33^{22} + 22^{11}$.

Зрозуміло, що треба знайти остачу від ділення числа A на 10.

$33 \equiv 3 \pmod{10}, \Rightarrow 33^2 \equiv 9 \pmod{10}$

оскільки, $9 \equiv -1 \pmod{10}$, то за властивістю 3 маємо $33^2 \equiv -1 \pmod{10}$, звідки $33^{22} \equiv (-1)^{11} \pmod{10}$, або

$33^{22} \equiv -1 \pmod{10}$ (7)

$$\left.\begin{array}{l} 22 \equiv 2 \pmod{10} \\ 22^5 \equiv 2^5 \pmod{10} \end{array}\right. \text{звідки за властивістю 6}$$

Оскільки,

$$\left.\begin{array}{l} 2^5 \equiv 2 \pmod{10}, \\ 22^5 \equiv 2 \pmod{10} \end{array}\right. \text{то}$$

Крім того, $22^{10} \equiv 2^2 \pmod{10}$ . Тому прийнявши до уваги властивості 1, 5, одержимо:

$$\left.\begin{array}{l} 22^{10} \cdot 2 \equiv 2^2 \cdot 2 \pmod{10}, \\ 22^{11} \equiv 8 \pmod{10} \end{array}\right. \text{або}$$

За властивістю 4 порівняння 7, 8 можна почленно додати. Тому маємо

$$33^{22}+22^{11}\equiv(8-1)(\mathrm{mod}\,10).$$

Отже, число $33^{22}$ + $22^{11}$ дає в остачі при діленні на 10 число 7.

Таким чином, останньою цифрою цього числа буде 7.

**Приклад 2.**

Довести, що при будь – якому натуральному n число 37 $^{n+2}$ + 16 $^{n+1}$ + +23 $^{n}$ ділиться на 7.

$$37\equiv 2(\mathrm{mod}\,7), 37^{m+2}\equiv 2^{n+2}(\mathrm{mod}\,7)$$

$$16\equiv 2(\mathrm{mod}\,7), 16^{n+1}\equiv 2^{n+1}(\mathrm{mod}\,7)$$

$$23\equiv 2(\mathrm{mod}\,7), 23^{n}\equiv 2^{n}(\mathrm{mod}\,7)$$

Отже,

$$37^{n+2}+16^{n+1}+23^{n}\equiv 2^{n+2}+2^{n+1}+2^{n}.$$

Але $2^{n+2}+2^{n+1}+2^{n}=2^{n}(4+2+1)=7\cdot 2^{n}$ - ділиться на 7. Тому

$$2^{n+2}+2^{n+1}+2^{n}\equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$$

За властивістю 3 $37^{n+2}+16^{n+1}+23^{n}\equiv 0(\mathrm{mod}\,7)$, тобто ділиться на 7.

**Приклад 3.**

Довести, що всяке число вигляду А = 8 ( $3^{5к}$+$5^{5n}$) – 5, де n, k – довільні натуральні числа, є складеним.

$$3^{5}=243\equiv 1(\mathrm{mod}\,11), 3^{5k}\equiv 1(\mathrm{mod}\,11);$$

$$5^{5}=3125\equiv 1(\mathrm{mod}\,11), 5^{5n}\equiv 1(\mathrm{mod}\,11);$$

$$8\equiv 8(\mathrm{mod}\,11.)$$

Отже, згідно 1, 4, 5, маємо

$$8\cdot\left(3^{5k}+5^{n}\right)\equiv 8(1+1)\cdot(\mathrm{mod}\,11);$$

$$16\equiv 5(\mathrm{mod}\,11).$$

Тому 8( $3^{5к}$ + $5^{5n}$) – 5 = А ділиться на 5, а отже є складеним.

**Приклад 4.**

Знайти дві останні цифри числа $9^{9^9}$.

Оскільки мова йде про дві останні цифри числа, то використаємо порівняння за модулем 100.

Оскільки

$$9^{10}\equiv 1(\mathrm{mod}\,100),$$

то

$$9^{10q}\equiv 1^{q}(\mathrm{mod}\,100),$$

де q – натуральне число ( q > 1);

Тоді

$$9^{10qr1}\equiv 9^{r}(\mathrm{mod}\,100), r\geq 1.(9)$$

Оскільки $9^{9}\equiv 9(\mathrm{mod}\,10)$, то це означає, що $9^{9}$ – 9 ділиться на 10, тобто можна записати число $9^{9}$, ща так:

$9^{9}$ - 9 = 10q, або $9^{9}$ = 10q + 9

Тому, поклавши в ( 9 ) r = 9, одержимо

$$9^{9^9}=9^{10q+9}\equiv 9(65\cdot 100+61)^{2}=9\cdot(100L+21)=100M+89$$

Отже,

$9^9 \equiv 89 \pmod{100}$,

Звідки остаточно одержуємо $9^{9^9} \equiv 9^9 \equiv 89 \pmod{100}$.

Шуканими цифрами є 8 і 9.

## 3. ЗАДАЧІ ДЛЯ САМОСТІЙНОГО РОЗВ’ЯЗУВАННЯ .

1. Довести, що:

а) $(8*23^{23}-71*32^{32})$ 10,$(16^3+2^7)$ 33;

б) Квадрат непарного числа при діленні на 8 дає остачу 1;

в) при простих p> 5 $(p^2-25) \vdots 24$

г) при простих p> 7 число $(p^4-1) \vdots 240$;

д) при простих $p_i \geq 5$, i=1,2,...,24,число $p_1^2+p_2^2+\ldots+p_{24}^2$ ділиться на 24.

2. Довести,що для довільного натурального n :

а) $(7^{2n}-5^{2n}) \vdots 24$б)$(n^7-n) \vdots 42$;

в) $(n^5-5^{n3}+4^n) \vdots 120$ г)$(2^{2n-1}-9n^2+21^n-14) \vdots 27$;

д) $(n^9-n^5) \vdots 10$ е)$(4^n+6^{n-1}) \vdots 9$

є) $(5^{n+2}+26\cdot 5^n+82^{n+1}) \vdots 59$ ж) $(10^{n+1}-10(n+1)+n) \vdots 81$.

з) $(5^{6n+5}+7^{6n}+7) \vdots 9$

3. Знайти остачу від ділення:

а) $3^{105}+4^{105}$ на 181;

б) $(2^{60}+7^{30})$на13;

в) $1^{100}+2^{100}+\ldots+1980^{100}$на125;

г) $2^p$ на 13. p–просте число;

д) $10^{10}+10^{10}=10^{10}+\ldots+10^{10}$ на 7.

4. Знайти останню цифру чисел:

а)$2^3$; б)$19^{91}$; в)$9^{9;}$ г)$19877^{1989}$ .

## 4. ПІДСУМКИ ЗАНЯТТЯ.

Учні занурились в історичні витоки теорії чисел та опонували такі нові поняття як конгруенції (порівняння), ознайомилися з їх властивостями та , застосуванням даних понять в теорії подільності.

## 5. СПИСОК РЕКОМЕНДОВАНОЇ ЛІТЕРАТУРИ .

1. Лейфура В.М. Розв'язуємо задачі з цілими числами: Посібник.- Харків: Вид-во « Основа», 2003.- 114 с.

2. О. Оре Приглашение в теорию чисел: Пер с англ. Изд. 2-е, стереотипное. — М.: Едиториал УРСС, 2003. — 128 с.

3. А. Вейль Основы теории чисел. - М.: Мир, 1972 –408 с.

4. Сушкевич А.К. Теория чисел. Элементарный курс. Харьков: ХГУ, 1954. - 205 с.

5. Генкин С.Ф., Итенгберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки пособие для внеклассной работы. Киров, "Аса", 1994. 272 с

6. Алфутова Н.Б., Устинов А.В. Алгебра и теория чисел для математических школ. М., МЦНМО, 2001. 264 с.

7. Завало С.Т., Левіщенко С.С., Пилаєв В.В., Рокіцкий І.А. Алгебра і теорія чисел. К.: Вища шк. Головне вид-во, 1976.- Ч.2-384с.

8. Кужель О.В. "Розвиток поняття про число. Ознаки подільності. Досконалі числа. - К.: Вища школа, 1974.- 128С.

# ДОДАТКИ

Слайди використанні в роботі гуртка за даної темою.


# ВИСНОВКИ.

Робота може бути використана при проведенні додаткових занять, присвячених розгляду вибраних неелементарних питань математики, за допомогою методів, які доступні школярам, а також для використання в написанні роботи до конкурсу - захисту науково - дослідницьких робіт МАН.