МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕПАРТАМЕНТ ОСВІТИ, НАУКИ ТА МОЛОДІ МИКОЛАЇВСЬКОЇ ОБЛДЕРЖАДМІНІСТРАЦІЇ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ЦЕНТР НАУКОВО-ТЕХНІЧНОЇ ТВОРЧОСТІ УЧНІВСЬКОЇ МОЛОДІ

ПОГОДЖЕНО Протокол засідання науково-методичної ради Миколаївського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти 25.09.2013р. № 4	ЗАТВЕРДЖЕНО Наказ департаменту освіти,науки та молоді Миколаївської облдержадміністрації 16.12.2014 № 802

Навчальна програма з позашкільної освіти
науково-технічного напрямку
«Юний математик»
(1 рік навчання)

Миколаїв – 2013

Програму підготував:

Гозян Наталія Іванівна - вчитель математики, керівник гуртка «Юний математик» Миколаївського обласного центру науково-технічної творчості учнівської молоді

Рецензенти:

Веліховська Алла Борисівна доцент кафедри природничо-математичної освіти та інформаційних технологій Миколаївського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти, кандидат педагогічних наук.

Курікша Оксана Вікторівна в.о. доцента кафедри прикладної та вищої математики Чорноморського державного університету ім. Петра Могили, кандидат фізико-математичних наук.

Відповідальний за випуск:

Грігораш Катерина Олексіївна – заступник директора з навчально-виховної роботи Миколаївського обласного центру науково-технічної творчості учнівської молоді, методист вищої категорії

Зміст програми

І. ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

На сьогодні до числа найбільш актуальних питань освіти є поліпшення якості освіти, зокрема науково-технічної, є необхідною умовою формування інноваційного суспільства та підвищення конкурентоспроможності економіки.

В умовах становлення і розвитку високотехнологічного інформаційного суспільства в Україні виникає необхідність підвищення якості та пріоритетності позашкільної науково-технічної освіти.

Отримання якісної математичної освіти є однією з найважливіших гарантій реалізації громадянами їх інтелектуального потенціалу, вирішальним фактором утвердження соціальної справедливості та політичної стабільності [1].

Математика – це потужний фактор інтелектуального розвитку дитини. Саме точні науки сприяють формуванню пізнавальних та творчих здібностей дитини. Одним із засобів зацікавлення учнів математикою є добре продумана позакласна робота. Вона є однією з форм організації пізнавальної діяльності учнів різного віку, але разом з тим вимагає конкретних знань, ерудованості, широкої обізнаності з математичних дисциплін.

Створення навчальної програми математичного гуртка «Юний математик» обумовлено необхідністю розвитку зацікавленості математикою дітей. Навчальна програма орієнтована на учнів 5-7-х класів. Тематика гурткових занять спирається на базову програму, але дає змогу ширше висвітлювати традиційні питання використовуючи цікаві математичні задачі і вправи творчого характеру. Такі завдання направлені на формування в учнів навичок самостійної роботи, таких як аналіз, узагальнення. Підбір завдань іде з урахуванням вікових особливостей дітей - задачі-родзинки, задачі-ігри, задачі-фортеці, математичні головоломки та парадокси.

На гурткових заняттях як методичний прийом застосовуються індивідуально-класні математичні ігри. Такі ігри розширюють можливості предмета у вихованні особистості учня. Тут виробляється вміння напружувати свої сили у важкій справі і прагнення будь-що довести її до кінця. На таких іграх математична задача стає об'єктом справжнього змагання. Але тут цінно не стільки змагання само по собі, скільки зароджується з ньому захоплення учнів предметом. Головне що дітей починає цікавити саме математика, а не жарти на математичні теми.

Метою програми є формування компетентностей особистості в процесі математичної позашкільної освіти, а саме формування в учнів уявлень про математику як форму опису та метод пізнання дійсності, розуміння ролі математики в сучасному житті.

Завдання навчальної програми: прищеплювати учням інтерес до математики; поглиблювати і розширювати знання учнів з математики; розвивати математичний кругозір, логічне й абстрактне мислення, дослідницькі вміння та навички школярів; сприяти інтелектуально-практичній дослідницькій діяльності гуртківців.

Основні завдання полягають у формуванні таких компетентностей:

- *пізнавальної:* озброєння учнів певним обсягом математичних знань і вмінь, необхідних для сприйняття та усвідомлення навколишньої дійсності, підвищення загальної математичної культури; зацікавлення дітей вивченням історії математики, формування розумових операцій (аналізу, синтезу, порівняння, узагальнення, класифікації); розвиток просторового мислення: геометричне моделювання; інтелектуальний розвиток гуртківців, розвиток їхнього логічного мислення; опанування гуртківцями системи математичних знань та вмінь, що є базою для реалізації зазначених цілей: підвищення рівня знань з базової дисципліни «математика»; ознайомлення з принципами та ідеями загальнодержавного науково-громадського проекту Мала академія наук України;

- *практичної:* формування умінь і навичок складання математичної моделі задачі, застосовування математичних властивостей під час розв'язування задач, узагальнення і систематизування прийомів розв’язування математичних задач, розвивати мову, спостережливість, розумову активність, вміння висловлювати і обґрунтовувати свої судження; розвивати слухову і зорову увагу, пам'ять, логічне мислення; розвивати конструктивні і творчі здібності, фантазію, творчу уяву;
- *творчої:* гармонійний розвиток особистості, розвиток творчої активності, логічного мислення та математичного мовлення, просторової уяви;
- *соціальної:* формування життєвої самостійності, освіченої особистості, підготовленої до життя та активної трудової діяльності, розвиток загальнолюдських позитивних якостей, виховувати інтерес до придбання нових знань; розвивати самостійність, уміння планувати свою роботу; виховувати дружні стосунки між дітьми, звичку займатися спільно.

Гурток «Юний математик» є ***початковим рівнем*** де закладається фундамент базових знань і умінь гуртківців, який використовується і набуває подальшого розвитку в гуртках «Математика. Позашкільний компонент (1 рік навчання)» та «Математика. Позашкільний компонент (2 рік навчання)» які є ***основним рівнем*** навчання. Гурток початкового рівня навчання комплектується з учнів 5-7 класів, основного рівня першого року навчання – з 8-9 кл. і другого року навчання – 10-11 класів. Він виконує функцію допрофесійної (загальної, профорієнтаційної підготовки гуртківців, розкриваючи їх математичні здібності до науко-дослідницької роботи в системі Малої академії наук по секціям «математика», «прикладна математика», «інформатика», «економіка», «технікотехнологічна», «фізика», «астрономія», які вибирають базову дисципліну математику.

Формування в учнів навичок самостійної пізнавальної і дослідницької діяльності, розв'язування задач різними способами, знайомство з історією математики розвиває в учнів цікавість, уважність, спостережливість, логічне мислення, знайомить з поняттям алгоритму. Всі ці риси потрібні для всебічного розвитку особистості, становлення світогляду, критичного мислення, світосприйняття дитини.

Підбір тем заняття відбувається з урахуванням шкільної підготовки учнів та шкільної програми факультативних занять. Проведення занять відбувається у формі живого, безпосереднього спілкування учнів та викладача, з урахуванням індивідуального підходу до гуртківців. Підчас занять використовуються комп'ютерні технології.

Вивчення додаткових розділів математики розширює математичний кругозір та закладає певні навички дослідницької діяльності, що дозволяє розв'язувати задачі підвищеної складності.

Робота гуртка передбачає наступну **організаційну роботу:** запис бажаючих відвідувати математичний гурток; складання плану роботи гуртка на навчальний рік; загальні збори членів гуртка; підсумки роботи гуртка за рік; огляд наочних матеріалів; заключне слово керівника.

Навчальну програму складено на підставі про методичні рекомендації щодо змісту та оформлення навчальних програм з позашкільної освіти [2,3] та програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання [4].

II. Навчально-тематичний план

№ п/п	Розділ, тема	Кількість годин		
		усього	теоретичні	практичні
1	Вступ	3	3	-
2	Математичні парадокси та таємниці.	21	6	15
3	Таємниці натуральних чисел.	30	12	18
4	Логічні завдання	15	6	9
5	Текстові завдання	15	6	9
6	Задачі на відсотки	30	12	18
7	Задачі на подільність	15	6	9
8	Конструювання	36	12	24
9	Топологічні досліди	33	18	15
10	Математичний турнір	15	9	6
11	Задачі на принцип Діріхле	21	6	15
12	Математичні ігри	21	6	15
13	Задачі на інваріант	21	6	15
14	Симетрія. Комбінаторні задачі. Елементи комбінаторики	27	12	15
15	Геометрія подорожей. Лабіринти.	21	15	6
16	Підсумкове заняття			
	Разом	**324**	**126**	**198**

III. ЗМІСТ ПРОГРАМИ

1. Вступ.

(3 год.)

Ознайомлення з планом роботи та методами роботи гуртка. Представлення освітніх - інтернет ресурсів з математики.

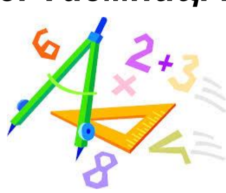
2. Математичні парадокси та софізм

(21год.)

Парадокси в математиці. Властивість парадоксів. Усунення і пояснення парадоксів. Різноманіття парадоксів: парадокс "Брехуна", парадокс Греллінга, парадокс Беррі, парадокси з множинами, парадокси-петлі. Математичні софізми. Проблеми парадоксів в математиці.

Практична робота. Ознайомлення з мате математичними парадоксами та софізмами. Підготовка та розробка презентаційного матеріалу з даної тематики.

3. Таємниці натуральних чисел



(30 год.)

Історія виникнення чисел. Арабська та римська нумерація. Задачі з числами, записаними у римській нумерації (за допомогою сірників та без них). Таємниці арифметичних фокусів.

Натуральні числа. Розповіді про числа-велетні. Систематизація відомостей про натуральні числа, читання і запис багатоцифрових чисел.

Читання і обговорення розповідей про числа-велетні: «Легенда про шахівницю», «Нагорода», «Вигідна операція». Запис цифр і чисел у інших народів. Бесіда про походження та розвиток письмової нумерації. Цифри у різних народів. Конкурс «Хто більше знає прислів'їв, приказок, загадок, в яких зустрічаються числа?».

Поняття системи числення. Види систем числення. Запис чисел у десятковій системі числення. Запис чисел у позиційних системах числення, відмінних від десяткової.

Практична робота. Задачі на властивості чисел, на визначення та порівняння віку. Розв'язування числових ребусів, прикладів на відновлення, магічних квадратів. Відновлення цифр у записі числа. Підрахунок кількості використаних цифр. Числові квадрати, закономірності. Арифметичні дії в різних позиційних системах числення. Цифрові задачі. Підготовка низки задач для участі в математичному турнірі.

4. Логічні завдання

(15 год.)

Основні поняття логіки. Висловлювання. Логічні запитання. Логічні таблиці. Задачі, що розв'язуються з кінця. Задачі на кмітливість. Прийоми складання та розв'язування ребусів; розв'язання задач-загадок, задач-жартів, ребусів, задачі-історій; складення найпростіших ребусів, задач-загадок, задач-історій та задач-жартів.

Логічні задачі, що розв'язуються з використанням таблиць Поняття висловлювання як твердження, про яке можна сказати, істинне воно чи хибне.

Практична робота. Розв'язування та складання задач-загадок, задач-жартів, математичних ребусів, задач на відгадування чисел, задач, що записані у вигляді цікавих історій. Методи розв'язування логічних задач з використанням таблиць та за допомогою міркувань. Пояснення даних методів на прикладі розв'язування задач. Підготовка низки задач для участі в математичному турнірі.

5. Текстові задачі

(15 год.)

Текстові задачі. Задачі економічного характеру. Старовинні задачі на розрахунки в часі. Старовинні задачі на подорожі. Старовинні задачі на грошові розрахунки. Основні типи сюжетних текстових задач. Алгоритм розв'язування текстової задачі.

Загальні підходи до розв'язування задач за допомогою рівнянь. Етапи алгебраїчного розв'язування текстової задачі. Складання математичної моделі. Формули зв'язку між різними величинами. Задачі з абстрактними числовими даними. Задачі з однойменними величинами. Задачі з різнойменними величинами.

Задачі на рух в одному напрямку, зустрічний рух, рух по воді. Задачі на концентрацію і відсотковий вміст. Задачі на роботу. Задачі економічного змісту. Задачі геометричного змісту. Задачі на «було», «стало» і «перекладання».

Практична робота. Застосування математичних засобів до розв'язування сюжетних задач. Розв'язування задач на розрахунки оплати комунальних послуг, оплати за споживання води, газу та електроенергії, використання таблицею тарифів комунальних платежів; прогнозування та оцінка результатів обчислень. Розв’язання задач з абстрактними числовими даними, з однойменними величинами, з різнойменними величинами. Підготовка низки задач для участі в математичному турнірі.

6. Задачі на відсотки

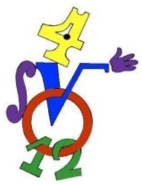
(30 год.)

Три типи задач на дроби. Розв'язування задач за допомогою зображення дробів на відрізку. Стародавні задачі, пов'язані з поняттям дробу. Три типи задач на відсотки. Задачі на відсотки, пов'язані зі збільшенням (зменшенням) числа на кілька відсотків. Концентрація. Задачі на розчини, суміші і сплави.

Поняття відсотка. Три типи найпростіших задач на відсотки: задачі на знаходження відсотка від даного числа; задачі на знаходження числа за його відсотком; задачі на знаходження відсоткового відношення двох чисел..

Практична робота. Розв'язування задач за допомогою пропорцій. Задачі підвищеної складності. Розв’язання тестів вхідного тестування (1 рівень) з даної тематики. Обласна математична олімпіада. Розв’язання задач з даної тематики (вибірка задач). Розв'язування задач методом зведення до одиниці. Розв'язування задач методом зведення до відповідних задач на дроби. Розв'язування складніших задач на відсотки. Підготовка низки задач для участі в математичному турнірі.

7. Задачі на подільність

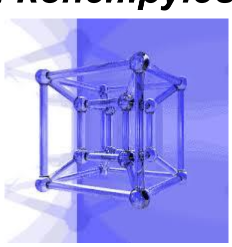


(15 год.)

Ознаки подільності на 4 і 25, 8 і 125, 7 (11 чи 13). Ознаки подільності на складені числа. Властивості подільності. Прості числа. НСД і НСК. Різні способи знаходження НСД і НСК. Алгоритм Евкліда для знаходження НСД до розв'язування задач підвищеної складності.

Практична робота. Розв’язання задач на подільність. Знаходження найбільшого спільного дільника та найменшого спільного кратного (НСД і НСК). Задачі підвищеної складності. Розв’язання тестів вхідного тестування (1 рівень) з даної тематики та математичних олімпіад. Підготовка низки задач для участі в математичному турнірі.

8. Конструювання



(36 год.)

Геометрія як розділ математики. Креслярські інструменти та правила користування ними при побудові та вимірюванні. Поняття про найпростіші геометричні фігури: точка, пряма, промінь, відрізок, кут, коло, многокутник та їхні властивості.

Задачі на розвиток просторової орієнтації та уяви. Задачі із сірниками. Головоломки клітчастого паперу. Паркети. Бордюри. Конструювання. Складання та розрізання паперу, рамки та вкладки Монтессорі. «Стомахіон» Архімеда. Різновиди конструкторів поліміно: пентаміно, гексаміно. Мистецтво паперового конструювання оригамі. Конструювання з букви Т. Шахова дошка. Техніки складання та розрізання паперу, рамки та вкладки Монтессорі. Симетрія фігур та її використання для розв'язування логічних задач.

Практична робота. Геометричне конструювання. Складання різних конструкцій з букв Т і Г. Складання композицій орнаментів, малюнків найпростішими прийомами оригамі. Складання візерунків та конструкцій за допомогою рамок та вкладок Монтессорі. Виготовлення моделей різних конструкцій. Підготовка презентації з теми: «Геометричні ілюзії».

9. Топологічні досліди

(33 год.)

Сутність топології Топологічні досліди Топологія. Фігури одним розчерком пера. Листок Мебіуса. Пляшка Кляйна. Побудова фігур одним розчерком пера; принцип побудови листка Мебіуса; виготовлення варіантів листка Мебіуса; опис конструкції пляшки Кляйна та початкові знання про зв'язок між її будовою та будовою Всесвіту. Чудові криві та їх властивості. Криві дракона, властивості практичне значення. Графічна культура побудови геометричних рисунків

Практична робота. Вміти будувати найпростіші фігури одним розчерком пера. Побудова моделі листка Мебіуса. Підготовка презентаційного довідкового матеріалу з теми «Чудові криві та їх властивості». Доповіді учнів реферативного характеру.

10. Математичний турнір

(15 год.)

Математична вікторина «Чи знаєш ти видатних математиків?». Математичний феєрверк.

Створення проекту «Цікава математика», який базується на матеріалі курсу.

Практична робота. Підготовка демонстраційного матеріалу до проекту «Цікава математика». Проведення математичного турніру.

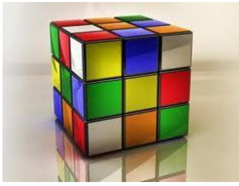
11. Задачі на принцип Діріхле

(21 год.)

Принцип Діріхле. Розбір формулювання принципу Діріхле, доведення принципу методом від супротивного. Задачі на застосування принципу Діріхле. Поняття теорії множин, кругів Ейлера—Венна.

Практична робота. Приклади різних задач, що розв'язуються за допомогою принципу Діріхле. Самостійне розв'язування задач та колективне обговорення розв'язків. Розв'язування задач за допомогою кругів Ейлера—Венна.

12. Математичні ігри

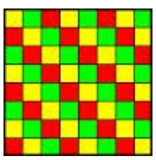


(21 год.)

Характеристики задач-ігор. Пошук виграшних стратегій (гра «з кінця», симетрія). Приклади задач-ігор. Тактика гри. Пошук виграшної стратегії. Розв'язує ігри «з кінця» та за допомогою симетрії.

Практична робота. Розв'язування олімпіадних задач. Підготовка низки задач для участі в математичних змаганнях. Доповіді учнів реферативного характеру. Підготовка презентаційного матеріалу з теми «Математичні ігри».

13. Задачі на інваріант



(21 год.)

Поняття інваріанта деякого перетворення. Розгляд як інваріанту парності (непарності) і остачі від ділення. Визначення парного і непарного числа. Застосування парності при розв'язуванні задач. Інші стандартні інваріанти: перестановки, розфарбовування.

Практична робота. Розв'язування задач підвішеної складності та олімпіадних задач різного рівня. Підготовка низки задач для участі в математичних змаганнях. Доповіді учнів реферативного характеру. Підготовка презентаційного матеріалу з теми «Інші стандартні інваріанти: перестановки, розфарбовування.

14. Симетрія. Комбінаторні задачі. Елементи комбінаторики

(27 год.)

Математична логіка: Сюжетні задачі з відомою наперед кількістю персонажів (подій). Операції над множинами. Зображення залежностей між множинами за допомогою кругів Ейлера. Правило множення та додавання. Комбінаторика: Впорядкування чисел. Перестановки, розташування і комбінації. Комбінаторні задачі.

Практична робота. Розв'язання логічних задач та задач з комбінаторики. Розв'язування задач підвішеної складності та олімпіадних задач різного рівня. Підготовка низки задач для участі в математичних змаганнях. Доповіді учнів реферативного характеру. Підготовка презентаційного матеріалу з теми «Класичні комбінаторні задачі», «Історичні есе».

15. Геометрія подорожей. Лабіринти. Графи

(21 год.)

Точки на координатній площині. Можливості координатної площини. Зашифроване листування. Лабіринт. Морський бій. Графи та їх застосування в розв'язуванні задач Поняття графа, визначення парної вершини, непарної вершини. Властивості графа. Розв'язування задач з використанням графів. Знайомство з біографією Леонарда Ейлера.

Практична робота. Побудова точки за координатами та визначати координати точок на координатній площині; техніка побудови рисунків на координатній площині за координатами відповідних точок; знання про координати точок під час гри в морський бій та проходження лабіринтів; принципи шифрування в зашифрованому листуванні. Розв'язання задач з використанням понять: вершина, ребро і дуга графа, зв'язність графа, матриця суміжності. Задачі на кількість маршрутів, найкоротший шлях. Модель лабіринту. Доповіді учнів реферативного характеру. Підготовка презентаційного матеріалу з теми «Теорія графів», «Історичні есе».

IV. Прогнозований результат

Після вивчення курсу учні повинні **знати**:

- поняття алгоритму;
- алгоритми розв'язання базових задач;
- історичні аспекти математичної науки;
- поняття математичного парадоксу та софізму;
- елементарні поняття теорії чисел;
- мати уявлення про топологію;
- різні типи конструювання;
- поняття графів;
- прийоми ефективного використання ресурсів у розв'язаннях базових задачах.

Творча робота: гуртківці повинні **уміти:**

- розв'язування задач різними способами:
  - уміти розв'язувати задачі на відсотки;
  - уміти розв'язувати логічні задачі;
  - уміти розв'язувати задачі на подільність;
  - уміти розв'язувати задачі на принципом Діріхле;
  - уміти розв'язувати задачі на інваріанти;
- складати різні конструкції з букв Т і Г;
- складати композиції орнаментів, малюнків, візерунків за допомогою рамок та вкладок Монтессорі;
- представляти свої розв'язки задач під час проведення математичного турніру;
- засвоїти мистецтво паперового конструювання оригамі.
- робити портфоліо своїх досягнень,
- презентації до окремих занять гуртка,
- розробляти власні макети та моделі просторових фігур,
- приймати участь в математичних та освітніх конкурсах.

Завдяки використанню програми встановлюється швидкий обмін навчальною інформацією між керівником гуртка і учнем та контроль (самоконтроль) за виконанням навчальної програми.

Програмою передбачено читання лекцій та проведення практичних занять.

V. Література.

1. Про схвалення Концепції Державної цільової соціальної програми підвищення якості шкільної природничо-математичної освіти на період до 2015 року Розпорядження КМУ № 1720-р від 27.08.10 року від 27.08.10 року

2. Програми з позашкільної освіти. Науково-технічний напрям / Биковська О.В., Лихота С.О. – К.: Грамота,2007.-Вип.1.-360с.

3. Про методичні рекомендації щодо змісту та оформлення навчальних програм з позашкільної освіти. Лист Міністерства освіти і науки України, Державної наукової установи «Інститут інноваційних технологій і змісту освіти» від 05.06.2013 р.№ 14.1/ 10-1685.

4. Збірник програм з математики для допрофільної підготовки та профільного навчання (у двох частинах). Ч. І. Допрофільна підготовка: Факультативи та курси за вибором / Упоряд. Н. С. Прокопенко, О. П. Вашуленко, О. В. Єргіна.— Х.: Вид-во «Ранок», 2011.— 320 с

5. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969, 328 с.

6. Вишенський В.А., Дороговцев А.Я., Єжов І.І., Скороход А.В., Ядренко М.Й. Вибрані питання елементарної математики. К.: Вища школа, 1982, 455 .

7. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Збірник задач з математики. К.: Либідь, 1993, 344 .

8. В.А.Вишенський, Н.В.Карташов, В.І.Михайловський, М.І.. Ядренко Київські математичні олімпіади. 1984-1993рр. – Київ: Либідь,1993.-144с.

9. В. А. Вишенський, О. Г. Ганюшкін, М. В. Карташов, В. І. Михайловський, Г. Й. Призва, М. Й. Ядренко, Українські математичні олімпіади. — Київ: Вища школа, 1993.—415с.

10. В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв’язання.-Львів: Євросвіт, 1999.-128с.

11. В.М. Лейфура. Математичні задачі евристичного характеру.-К.: Вища шк., 1992.-91с.

12. В.М.Лейфура. Задачі з цілими числами.-Х.:Вид.група „Основа”, 2003.-144с.

13. Ліпчевський Л. В., Музичко К. А. Олімпіада з математики: завдання тарозв'язки: Навчально-методичний посібник.— Біла Церква: КОІПОПК, 2008.— 124 с.

14. Лоповок Л. М. Збірник математичних задач логічного характеру.— К.: Рад. шк., 1972.— 142 с.

15. Нагибин Ф. Ф. Математическая шкатулка.— М.: Просвещение, 1964.— 133 с.

16. Сарана О. А. Математичні олімпіади: просте і складне поруч: Навч. посібн.— К.: Видавництво «А.С.К.», 2004.— 344 с.

17. Смаллиан Р. Как же называется эта книга? / Пер. с англ.— М.: Мир, 1981.— 138 с.

18. Смаллиан Р. Принцесса или тигр? / Пер с англ.— М.: Мир, 1985.— 221 с.

19. Тадєєв В. О. Неформальна математика. 6-9 класи. Навчальний посібник для учнів, які хочуть знати більше, ніж вивчається у школі.— Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2003.— 288 с.

20. Федак І. В. Цілі числа. Комбінації. Принцип Діріхле. Ігри. Посібник для підготовки до математичних олімпіад у 7-8 класах.— Тернопіль, 1997.— 60 с.— (Бібліотечка заочної математичної школи).

21. Харік О. Ю. Матеріали для факультативних занять, спецкурсів, гуртків. Математика 5-7.— Х.: Вид. група «Основа», 2008.— 143 с.

22. Ясінський В. А. Задачі математичних олімпіад та методи їх розв'язування.— Тернопіль: Навчальна книга — Богдан, 2006.— 208 с.

23. Матеріали Міжнародного математичного конкурсу «Кенгуру». В. М. Лейфура, В. А Ясінський Про доведення геометричних нерівностей // У світі математики. – 2002, т. 8, вип. 2. – с. 51 – 59.

24. В. А. Ясінський Застосування рівномірного руху до розв’язування планіметричних задач // Математика в школі, 2000, №2. – с. 38 – 40.

25. В. А. Ясінський, А. І. Воробйова, В. М. Лейфура Поговоримо про потужність множини // У світі математики. – 2000, т. 6, вип. 1. – с. 11 – 22.

26. В. О. Швець, В. А. Ясінський Про перетин трьох прямих в одній точці та перпендикулярність // Математика в школі, 1999, №1. – с. 50–51.

27. В. А. Ясінський Про застосування орієнтованої відстані //Математика в школі, 1999, №2. – с.35 – 37.

28. В. М. Лейфура, В. А. Ясінський Принцип крайнього // У світі математики. – 1997, т. 3, вип. 3. – с. 29 – 39.

VI. Каталог освітніх ресурсів з математики.

- Math.ru - чудові книги, для школярів , які цікавляться точними науками
- популярні лекції з математики
- Математика он-лайн, занимательная математика - школьникам
- Виртуальная школа юного математика
- Острів знань (математика) http://www.ostriv.in.ua/index.php?option=com_menufolder&Itemid=198&ft=1
- http://zaba.ru/ математические олимпиады и задачи.
- http://www.exponenta.ru/ - образовательный математический сайт
- http://kvant.mirror1.mccme.ru/ Науково-популярний фізико-математичний журнал "Квант"
- http://www.allmath.ru/ - математичний портал,
- http://www.mathtest.ru/ Математика для школярів
- http://www.man.gov.ua –Мала академія наук
- http://mathworld.ru/Даний веб-ресурс містить завдання, спрямовані на виховання гнучкості математичного мислення і розвиток ініціативи та кмітливості. На сайті ви також знайдете теоретичний матеріал з елементарної математики, цікаві математичні факти, історії з життя математиків
- http://math-on-line.com"Олімпіади, ігри, конкурси по математиці для школярів". Цікава математика - школярам. Он-лайн учбовий центр по проведенню олімпіад, ігор-тренінгів і конкурсів по математиці для школярів 5-8 класів
- http://www.golovolomka.hobby.ru/ Головоломки та парадокси.

VII. Поурочне планування роботи гуртка «Юний математик»

№	Тема, розділ програми. Зміст роботи (на кожне заняття)	Вид роботи	години
	1. Вступ		
1.	Ознайомлення з планом роботи та методами роботи гуртка. Представлення освітніх - інтернет ресурсів з математики.	(т.з.)	3
	2. Математичні парадокси та софізм. (21 год.)		
3.	Парадокси в математиці. Властивість парадоксів	(т.з.)	3
4.	Усунення і пояснення парадоксів.	(т.з.)	3
5.	Різноманіття парадоксів: парадокс "Брехуна", парадокс Греллінга, парадокс Беррі.	(т.з.)	3
6.	Парадокси з множинами, парадокси-петлі.	(т.з.)	3
7.	Математичні софізми. Проблеми парадоксів в математиці	(т.з.)	3
8.	Ознайомлення з математичними парадоксами та софізмами. Підготовка та розробка презентаційного матеріалу з даної тематики.	(т.з.)	3
9.	Розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	3
	3. Таємниці натуральних чисел (30 год.)		
10.	Історія виникнення чисел. Арабська та римська нумерація. Задачі з числами, записаними у римській нумерації (за допомогою сірників та без них). Таємниці арифметичних фокусів.	(т.з.)	3
11.	Натуральні числа. Розповіді про числа-велетні. Систематизація відомостей про натуральні числа, читання і запис багатоцифрових чисел.	(т.з.)	3
12.	Читання і обговорення розповідей про числа-велетні: «Легенда про шахівницю», «Нагорода», «Вигідна операція».	(п.з.)	3
13.	Запис цифр і чисел у інших народів. Бесіда про походження та розвиток письмової нумерації. Цифри у різних народів.	(т.з.)	3
14.	Конкурс «Хто більше знає прислів'їв, приказок, загадок, в яких зустрічаються числа?».	(п.з.)	3
15.	Поняття системи числення. Види систем числення. Запис чисел у десятковій системі числення. Запис чисел у позиційних системах числення, відмінних від десяткової.	(т.з.)	3
16.	Задачі на властивості чисел, на визначення та порівняння віку. Розв'язування числових ребусів, прикладів на відновлення, магічних квадратів.	(п.з.)	3

17.	Цифрові задачі. Підготовка низки задач для участі в математичному турнірі.	(п.з.)	3
18.	Відновлення цифр у записі числа. Підрахунок кількості використаних цифр.	(п.з.)	3
19.	Числові квадрати, закономірності. Арифметичні дії в різних позиційних системах числення.	(п.з.)	3
	4. Логічні завдання (15 год.)		
20.	Основні поняття логіки. Висловлювання. Логічні запитання. Логічні таблиці .	(т.з.)	3
21.	Задачі, що розв'язуються з кінця. Задачі на кмітливість.	(т.з.)	3
22.	Логічні задачі, що розв'язуються з використанням таблиць Поняття висловлювання як твердження, про яке можна сказати, істинне воно чи хибне.	(т.з.)	3
23.	Розв'язування та складання задач-загадок, задач-жартів, математичних ребусів, задач на відгадування чисел, задач, що записані у вигляді цікавих історій.	(п.з.)	3
24.	Методи розв'язування логічних задач з використанням таблиць та за допомогою міркувань. Пояснення даних методів на прикладі розв'язування задач. Підготовка низки задач для участі в математичному турнірі.	(п.з.)	3
	5. Текстові задачі (15 год.)		
25.	Задачі економічного характеру. Старовинні задачі на розрахунки в часі.	(т.з.)	3
26.	Загальні підходи до розв'язування задач за допомогою рівнянь. Етапи алгебраїчного розв'язування текстової задачі.	(т.з.)	3
27.	Задачі на рух в одному напрямку, зустрічний рух, рух по воді. Задачі на концентрацію і відсотковий вміст.	(т.з.)	3
28.	Застосування математичних засобів до розв'язування сюжетних задач.	(п.з.)	3
29.	Розв’язання задач з абстрактними числовими даними, з однойменними величинами, з різнойменними величинами. Підготовка низки задач для участі в математичному турнірі.	(п.з.)	3
	6. Задачі на відсотки (30 год.)		
30.	Три типи задач на дроби. Стародавні задачі, пов'язані з поняттям дробу.	(т.з.)	3
31.	Розв'язування задач за допомогою зображення дробів на відрізку.	(п.з.)	3
32.	Три типи задач на відсотки. Задачі на відсотки, пов'язані зі збільшенням (зменшенням) числа на кілька відсотків.	(т.з.)	3
33.	Концентрація. Задачі на розчини, суміші і сплави.	(т.з.)	3
34.	Поняття відсотка. Три типи найпростіших задач на відсотки	(т.з.)	3
35.	Розв'язування задач за допомогою пропорцій.	(п.з.)	3
36.	Задачі підвищеної складності.	(п.з.)	3

37.	Розв'язування задач методом зведення до одиниці.	(п.з.)	3
38.	Розв'язування задач методом зведення до відповідних задач на дроби.	(п.з.)	3
39.	Розв'язування складніших задач на відсотки. Підготовка низки задач для участі в математичному турнірі.	(п.з.)	3
	7. Задачі на подільність (15 год.)		
40.	Властивості подільності. Прості числа.	(т.з.)	3
41.	НСД і НСК. Різні способи знаходження НСД і НСК.	(т.з.)	3
42.	Розв’язання задач на подільність.	(п.з.)	3
43.	Задачі підвищеної складності. Розв’язання тестів вхідного тестування (1 рівень) з даної тематики та математичних олімпіад.	(п.з.)	3
44.	Підготовка низки задач для участі в математичному турнірі.	(п.з.)	3
	8. Конструювання (36 год.)		
45.	Геометрія як розділ математики. Поняття про найпростіші геометричні фігури: точка, пряма, промінь, відрізок, кут, коло, многокутник та їхні властивості.	(т.з.)	3
46.	Креслярські інструменти та правила користування ними при побудові та вимірюванні.	(т.з.)	3
47.	Задачі на розвиток просторової орієнтації та уяви. Задачі із сірниками.	(т.з.)	3
48.	Головоломки клітчастого паперу. Паркети. Бордюри.	(т.з.)	3
49.	Конструювання. Складання та розрізання паперу, рамки та вкладки Монтессорі.	(п.з.)	3
50.	Мистецтво паперового конструювання оригамі. Конструювання з букви Т.	(п.з.)	3
51.	Геометричне конструювання. Складання різних конструкцій з букв Т і Г.	(п.з.)	3
52.	Складання композицій орнаментів, малюнків найпростішими прийомами оригамі.	(п.з.)	3
53.	Складання візерунків та конструкцій за допомогою рамок та вкладок Монтессорі.	(п.з.)	3
54.	Виготовлення моделей різних конструкцій. Підготовка презентації з теми: «Геометричні ілюзії».	(п.з.)	3
55.	Симетрія фігур та її використання для розв'язування логічних задач.	(п.з.)	3
56.	Підготовка презентації з теми: «Геометричні ілюзії».	(п.з.)	3
	9. Топологічні досліди (33 год.)		
57.	Сутність топології Топологічні досліди Топологія.	(т.з.)	3
58.	Фігури одним розчерком пера. Листок Мебіуса. Пляшка Кляйна.	(т.з.)	3
59.	Побудова фігур одним розчерком пера; принцип побудови листка Мебіуса; виготовлення варіантів листка Мебіуса.	(т.з.)	3
60.	Опис конструкції пляшки Кляйна та початкові знання про зв'язок між її будовою та будовою Всесвіту.	(т.з.)	3
61.	Чудові криві та їх властивості.	(т.з.)	3
62.	Криві дракона, властивості ,практичне значення.	(т.з.)	3

63.	Графічна культура побудови геометричних рисунків	(т.з.)	3
64.	Вміти будувати найпростіші фігури одним розчерком пера.	(п.з.)	3
65.	Побудова моделі листка Мебіуса.	(п.з.)	3
66.	Підготовка презентаційного довідкового матеріалу з теми «Чудові криві та їх властивості».	(п.з.)	3
67.	Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	3
	10. Математичний турнір (15 год.)		
68.	Математична вікторина «Чи знаєш ти видатних математиків?».	(т.з.)	3
69.	Математичний феєрверк.	(т.з.)	3
70.	Створення проекту «Цікава математика», який базується на матеріалі курсу.	(т.з.)	3
71.	Підготовка демонстраційного матеріалу до проекту «Цікава математика».	(п.з.)	3
72.	Проведення математичного турніру.	(п.з.)	3
	11. Задачі на принцип Діріхле (21 год.)		
73.	Принцип Діріхле.	(т.з.)	3
74.	Розбір формулювання принципу Діріхле, доведення принципу методом від супротивного.	(т.з.)	3
75.	Задачі на застосування принципу Діріхле.	(п.з.)	3
76.	Поняття теорії множин, кругів Ейлера—Венна.	(т.з.)	3
77.	Приклади різних задач, що розв'язуються за допомогою принципу Діріхле.	(п.з.)	3
78.	Самостійне розв'язування задач та колективне обговорення розв'язків.	(п.з.)	3
79.	Розв'язування задач за допомогою кругів Ейлера—Венна.	(п.з.)	3
	12. Математичні ігри (21 год.)		
80.	Характеристики задач-ігор.	(т.з.)	3
81.	Пошук виграшних стратегій (гра «з кінця», симетрія). Приклади задач-ігор.	(т.з.)	3
82.	Тактика гри. Пошук виграшної стратегії.	(т.з.)	3
83.	Розв'язує ігри «з кінця» та за допомогою симетрії.	(т.з.)	3
84.	Розв'язування олімпіадних задач.	(п.з.)	3
85.	Підготовка низки задач для участі в математичних змаганнях.	(п.з.)	3
86.	Доповіді учнів реферативного характеру. Підготовка презентаційного матеріалу з теми «Математичні ігри».	(п.з.)	3
	13. Задачі на інваріант (21 год.)		
87.	Поняття інваріанта деякого перетворення.	(т.з.)	3
88.	Розгляд як інваріанту парності (непарності) і остачі від ділення.	(т.з.)	3
89.	Визначення парного і непарного числа. Застосування парності при розв'язуванні задач.	(т.з.)	3
90.	Інші стандартні інваріанти: перестановки, розфарбовування.	(т.з.)	3
91.	Розв'язування задач підвішеної складності та олімпіадних задач	(п.з.)	3

	різного рівня.		
92.	Підготовка низки задач для участі в математичних змаганнях.	(п.з.)	3
93.	Доповіді учнів реферативного характеру. Підготовка презентаційного матеріалу з теми «Інші стандартні інваріанти: перестановки, розфарбовування.	(п.з.)	3
14. Симетрія. Комбінаторні задачі. Елементи комбінаторики (27 год.)			
94.	Математична логіка: Сюжетні задачі з відомою наперед кількістю персонажів (подій).	(т.з.)	3
95.	Операції над множинами.	(т.з.)	3
96.	Зображення залежностей між множинами за допомогою кругів Ейлера.	(т.з.)	3
97.	Правило множення та додавання.	(т.з.)	3
98.	Комбінаторика: Впорядкування чисел. Перестановки, розташування і комбінації. Комбінаторні задачі.	(т.з.)	3
99.	Розв’язання логічних задач та задач з комбінаторики.	(п.з.)	3
100	Розв'язування задач підвішеної складності та олімпіадних задач різного рівня.	(п.з.)	3
101	Підготовка низки задач для участі в математичних змаганнях.	(п.з.)	3
102	Доповіді учнів реферативного характеру. Підготовка презентаційного матеріалу з теми «Класичні комбінаторні задачі», «Історичні есе».	(п.з.)	3
15. Геометрія подорожей. Лабіринти. Графи (21 год.)			
103	Точки на координатній площині.	(т.з.)	3
104	Зашифроване листування. Лабіринт. Морський бій.	(т.з.)	3
105	Графи та їх застосування в розв'язуванні задач.	(т.з.)	3
106	Побудова точки за координатами та визначати координати точок на координатній площині.	(т.з.)	3
107	Принципи шифрування в зашифрованому листуванні.	(т.з.)	3
108	Розв’язання задач з використанням понять: вершина, ребро і дуга графа, зв'язність графа, матриця суміжності.	(п.з.)	3
109	Задачі на кількість маршрутів, найкоротший шлях. Модель лабіринту. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	3

*

Практичне заняття - (п.з.)

**

Теоретичне заняття - (т.з.)

VIII. Методична розробка до практичної частини: *Задачі – «родзинки» та задачі – «фортеці»*.

Текстові ломиголовки

Завдання 1. **Дерево.** У кружечки необхідно вписати числа від 1 до14 кожне рівно по одному разу. Якщо від кружечка відходять лінії нагору (гілки), то число в кружечку дорівнює сумі чисел на цих гілках. Число в «корені» теж є сумою чисел га гілках «нижнього ярусу». Деякі числа вже дані.

Завдання 2. ***Пігулки.*** На полі розміщено 12 пігулок. Десять із них мають номери від 1 до 10 (по одному разу), дві пігулки не мають номерів. Числа по краях квадрата вказують суму номерів пігулок, що зустрічаються в даному рядку або стовпчику. Відновіть номери пігулок.

Завдання 3. ***Поліцейські.*** Перед вами – план невеликого міста. Поліцейський, що стоїть на перехресті, проглядає всі вулиці, що сходяться в цьому перехресті. Необхідно розмістити на перехрестях чотирьох поліцейських, щоб вони могли бачити всі вулиці міста.

Завдання 4. ***Пари.*** З'єднайте однакові букви лініями, що проходять через центри клітинок. Лінії проходять із клітинки в клітинку горизонтально або вертикально. Лінії не повинні перетинатися. Кожна клітинка має використовуватися рівно один раз.

Завдання 5. Прямокутники. Розділіть сітку на прямокутники так, щоб кожен прямокутник містив як мінімум одне число. Кожне число в прямокутнику має дорівнювати довжині однієї з його сторін (прямокутник 2×4 містить числа 2 і 4 у будь-якій кількості, квадрат 3×3 - 3 у будь-якій кількості). Усі прямокутники мають бути різних розмірів, незалежно від орієнтації (не можна одночасно використовувати прямокутники 3×1 і 1×3).

Завдання 6. Множення. У квадраті необхідно розставити різні цілі числа – по два числа в кожному рядку й стовпчику. Числа по краях квадрата показують добуток чисел, що знаходяться у даному рядку або стовпчику.

Завдання 7. Перші зустрічні. У порожні клітинки таблиці необхідно вписати букви А В С Д Е (у прикладі А В С) так, щоб у кожному рядку й у кожному стовпчику всі букви зустрічалися рівно по одному разу. Деякі клітинки залишаються порожніми. Букви по краях квадрата вказують, яка з букв зустрінеться ПЕРШОЮ в даному рядку або стовпчику в цьому напрямку.

Завдання 8. Другі зустрічні. У порожні клітинки таблиці необхідно вписати букви А В С Д Е так, щоб у кожному рядку всі букви зустрічалися рівно по одному разу. Деякі клітинки залишаться порожніми. Букви по краях квадрата вказують, яка з букв зустрінеться ДРУГОЮ у даному рядку або стовпчику в цьому напрямку.

Завдання 9. Намети. Сітка являє собою план лісі, у якому розміщена деяка кількість дерев. До кожного дерева прив'язано рівно один намет (намет перебуває в клітинці, яка межує із деревом по стороні). Клітинки з наметами не можуть торкатися одна одної ні стороною, ні кутом. Числа по краях «лісу» показують, скільки наметів знаходиться в даному рядку або стовпчику.

Завдання 10. Сума. У наведеній числовій сітці необхідно розмістити наведену фігуру. Фігуру можна повертати, але не можна віддзеркалювати (перевертати). Необхідно максимізувати суму накритих фігурою чисел.

Задачі для наймолодших школярів

Задача 1. Скільки років дітям? В родині є троє дітей. Степану вдвічі більше років, ніж буде Оксані тоді, коли Миколі виповниться стільки років, скільки Степану зараз. Скільки років зараз Степану, Оксані й Миколі, якщо разом їм 19 років?

Задача 2. Хто де живе? На острові Трисельському є три села: Правдово, Чергуново та Неправдово. Відомо, що жителі першого села завжди кажуть правду, мешканці третього села завжди кажуть неправду, а у відповідях чергуновців неправда чергується з правдою (перша відповідь чергуновця може бути як правдою, так і неправдою).

Якось приїжджий зустрів п'ятьох остров'ян, яким він за характерними рисами їхньої зовнішності думці дав такі прізвиська: Косооко, Борода, Кирпань, Червонощок, Довговух. Бажаючи з'ясувати , в яких селах ці люди живуть, приїжджий попрохав двох з них розповісти, хто з якого села родом.

Косооко відповідав, що Борода – чергуновець, Кирпань – правдовець, Червонощок теж родом із Чергуново, а Довгоух - з Неправдово.

Борода ж твердив, що Косооко – чергуновець, Кирпань із Неправдово, Червонощок – правдовець, а Довгоух із Чергуново.

Чи можна на підставі отриманих відповідей зробити правильні висновки про рідне село кожного з острів'ян?

Задача 3. Розподіл ролей. У шкільному драмгуртку вирішили ставити «Лісову пісню» Лесі Українки. Та при розподілі жіночих ролей виникла суперечка. Оксана сказала, що погоджується грати лише Русалку або Мавку. Те ж саме заявила й Леся. Марійка сказала, що теж мріє про роль Русалки. У крайньому випадку погоджується на роль Матері Лукаша. Роль Мавки дуже просила Ганна, але сказала, що погоджується уступити її, якщо їй нададуть можливість зіграти роль Килини.

– Ні, я буду Килиною, - заявила Катя, - а ні, то дайте мені роль Русалки Польової.

Чи можна розподілити ролі так, щоб усі були задоволені?

Задача 4. Футбольний матч. У футбольних змаганнях з футболу за кубок змагалися три команди: «Альфа», «Бета» і «Гамма».

Змагання проводили у два кола. У першому «Альфа» жодного разу не програла, «Бета» не мала нічиїх, а «Гамма» жодного разу не виграла.

У другому колі «Альфа» жодного разу не виграла. «Бета» - не програла, а «Гамма» не зіграла внічию. У результаті для визначення переможця мав відбутися додатковий матч.

Як зіграли у другому колі «Альфа» і «Бета»?

Задача5. Які числа перемножили? На класній дошці виконали дію множення. Потім частину цифр стерли і замінили зірочками. Пропонується відновити стерті цифри:

Логічні задачі та ломи головки

Задача1. Скільки братів та сестер?

Максим та Світлана живуть в одному будинку. У Максима братів та сестер порівну. У Світлани сестер втроє більше, ніж у Максима, а всього стільки, скільки дітей у батьків Максима. Визначте, скільки братів та сестер у Максима та скільки сестер у Світлани?

Задача 2. Визначте час. Батько зателефонував дочці і сказав, що він скоро буде. Світлана уточнила : «А о котрій годині?» Батько відповів: «Полічи, коли я приїду, до кінця доби залишиться втроє менше того часу, який пройде від її початку». Визначте, о котрій годині батько Світлани буде дома?

Задача 3. Сума чисел. Сума п'яти послідовних чисел дорівнює числу 1989. Знайдіть ці числа.

Задача 4. Унікальне число. Знайдіть найменше число, яке ділиться без залишку на наступні 9 чисел : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 та10.

Задача 5. Визначте множник та множене. Добуток двох чисел дорівнює числу, яке записується трьома послідовними числами 123. Чому дорівнюють множник та множене, якщо відомо, що обидва вони менші числа 3?

Задача 6. «Полкан» та «Доклад» (криптографічна ломиголовка). Розшифруйте цікаві приклади на додавання, в яких однаковими буквами зашифровані однакові цифри, а різними буквами – різні цифри.

ПОЛКАН	ДОКЛАД
ПОЛКА	ОКЛАД
ПОЛК	КЛАД
ПОЛ	ЛАД
ПО	АД
П	Д
СУММА 'Н'	СУММА 'А'

Відповіді та вказівки.

1. У Максима 1 брат і 1 сестра. У Світлани 3 сестри. *Розв'язок.* В сім'ї Максима А сестер, у Світлани – 3А. Всього дітей у першої сім'ї – 2А+1. За умовою задачі з А=2А+1. Звідси визначаємо. Чому дорівнює А: 3А-2А=1, А=1. Звідси зробимо висновок: у Максима 1 брат і 1 сестра, у Світлани – 3 сестри.

2. О шостій годині вечора (18-00) Одна частина доби складає: 24:4=6 годин. Три частини відповідно - 3×6=18

3. Шукані числа: 395, 396, 397, 398, 399

4. Шукане число: 2520

5. -41 та -3. ((-41)×(-3)=123)

6. 173802 + 17380 + 1738 + 17 + 1 = 964402, 173802 + 17380 + 1738 + 173 + 17 + 1 = 964405

Таємниці натуральних чисел. Подільність суми, різниці, добутку.

Задача 1. Число a+1 ділиться на 3. Довести, що число 5+8a також ділиться на 3.

Задача 2. Число a+2 і 35-b ділиться на 11. Довести, що число a+b також ділиться на 11.

Задача 3. Число a^2 ділиться на a+b. Довести, що число b^2 також ділиться на a+b.

Задача 4. Кожне з чисел a+b і ab ділиться на число c. Довести, що а) a^2+b^2 ділиться на c,

б) $a^3 + b^3$ ділиться на c^2.

Задача 5. Довести, що число $a^4 + 4b^4$ ділиться на $a^2+2ab+2b^2$.

Задача 6. Довести, що число a^3 – a ділиться на 6 при будь-якому цілому a.

Задача 7. Довести, що число a^3 – a ділиться на 24 при будь-якому непарному a.

Задача 8. Число a+ b +c ділиться на 6. Довести, що число $a^3 + b^3 + c^3$ також ділиться на 6.

Задача 9. Довести, що при кожному цілому a число a^3-3a^2+2a ділиться на 6.

Задача10. Довести, що число a^5-5a^3+4a ділиться на 120 при будь-якому цілому a.

Розв'язання задач.

Задача 1. Зауважимо, що 5+8a=5(a+1)+3a. Оскільки a+1 ділиться на 3, то згідно з теоремою 1 число 5(a+1) =3a ділиться на 3.

Задача 2. Зауважимо, що згідно з теоремою 1 число c=(a+2)-(35- b)=(a+ b)-33 ділиться на 11. Тому a+ b=c+33 ділиться на11.

Задача 3. Відзначимо, що $b^2 = a^2 - (a^2 - b^2) = a^2 - (a-b)(a+b)$, звідки випливає, що b^2 ділиться на a+ b бо за припущенням a^2 ділиться на a+b.

Задача 4. 4а. Маємо $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$. Оскільки a+b і ab діляться на c, то $a^2 + b^2$ ділиться на c.

4б. Оскільки $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ і числа $a^2 + b^2$, ab та a+ b діляться на c, то $a^3 + b^3$ ділиться на c^2.

Задача 5. Маємо $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$.

Задача 6. Відзначимо, що $a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a-1)a(a+1)$. Добуток трьох послідовних чисел ділиться на 3. Справді, якщо a ділиться на 3, то a=3k і тому (a-1)a(a+1)=(3k-1) 3k (3k+1)=3(3k-1) k (3k+1) також ділиться на 3. Якщо a дає в остачі 1, то a=3k+1 і (a-1)a(a+1)= 3k (3k+1) (3k+2) ділиться на 3. Якщо ж a дає в остачі 2, то a=3k+2 і (a-1)a(a+1)= (3k+1) (3k+2) (3k+3)=3(3k+1) (3k+2) (k+1) ділиться на 3. З двох послідовних цілих чисел a-1 і a одне ділиться на 2. Тому (a-1)a(a+1) ділиться на 6.

Задача 7. Вже доведено, що a^3-a ділиться на 3. Нехай a непарне число, a=2r+1, де r- ціле число. Тоді $a^3-a=(a-1)a(a+1)=2r(2r+1)(2r+2)=4(2r+1)r(r+1)$. З двох послідовних чисел r і r+1 одне ділиться на 2. Тому a^3-a ділиться на 8.

Задача 8. Маємо $a^3+b^3+c^3=(a^3-a)+(b^3-b)+(c^3-c)+(a+b+c)$. Оскільки числа a^3-a, b^3-b, c^3-c та $a+b+c$ діляться на 6, то і $a^3+b^3+c^3$ діляться на 6.

Задача 9. Вказівка: $a^3-3a^2+2a=a^3-a-3a(a-1)$

Задача 10. Вказівка: $a^5-5a^3+4a=a[(a^4-a^2)-4(a^2-1)]=a(a^2-1)(a^2-4)=(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$.

Теорема 1. Якщо числа a і b діляться на c, то їх сума a+ b і різниця a+ b також діляться на c.

Комбінаторика

Задача 1. Скількома способами можна розташувати на полиці три книги?(A,B, C)

Розв'язок: Один із шляхів розв'язку цієї задачі полягає в тому, що ми випишемо всі можливі комбінації та підрахуємо їх. Розміркуємо так. В задачі необхідно заповнити три місця на полиці – зобразимо їх таким чином: На перше місце може бути поставлено книгу A, або B, або C. Тому перше місце можна заповнити трьома способами.

Для кожного з трьох випадків заповнення першого місця ми маємо лише два варіанта заповнення другого місця тому, що у нас залишилось лише дві з трьох книжок, і ми можемо взяти будь-яку з них. Таким чином перші два місця ми можемо заповнити 2×3 або шістьма способами. Нарешті, для кожного з шести варіантів заповнення перших двох місць існує лише один варіант заповнення третього, адже лишається тільки одна книга.

Отже, всі три місця ми можемо заповнити 6×1 або шістьма способами і наш малюнок виглядатиме так: 3 2 1

Загальну кількість розміщень отримаємо множенням: $3\times2\times1=6$. Зупинімось на хвилину і з'ясуємо, що означає для нас слово «розміщення». Ми говорили у розглянутому прикладі про розміщення трьох книг на полиці. Але ж буває також розміщення квітів у вазі, плям на скатертині, тощо….

Домовимось, що надалі будемо розглядати лише особливий вид розміщення, а саме лінійне розміщення, тобто таке впорядкування об'єктів (предметів), яке подібне до розміщення точок на прямій і назвемо таке розміщення. Щоб уникнути плутанини «перестановками».

Отже, перестановка – це будь-яке розміщення деякої кількості об'єктів (предметів) у певному лінійному порядку.

Задача 2. Ми маємо не менше трьох екземплярів книги А, не менше трьох екземплярів книги В І не менше трьох екземплярів книги С. Скількома різними способами можна розташувати на полиці три книги, вважаючи, що екземпляри однієї книги не можна розрізнити?

Розв'язок. Оскільки тепер ми маємо по три екземпляри кожної книги, то можливі і такі випадки: ААА, АВВ, СВС та ін.. Перший крок буде таким самим як і в першому прикладі. Друге ж місце можна заповнити вже трьома способами, адже крім двох книг, що залишилися, ми маємо ще один екземпляр книги, яку вже брали раніше. Розмірковуючи так само, побачимо, що і третє місце можна заповнити трьома способами. А всього розміщень буде $3\times 3\times 3=27$ Узагальнюючи розглянуті приклади, отримаємо універсальний метод розв'язку задач на перестановки.

Задача 3. Номер автомобіля складено з двох літер, за якими йде трьох значне число. Скільки існує різних номерів такого типу?

Розв'язок. Бачимо, що такий автомобільний номер складається з п'ятьох місць, причому на перші два можна поставити будь-які літери (навіть однакові), а на решту три цифри (також без обмежень). Згадавши, що наш алфавіт має 32 літери, а цифр всього 10 (враховуючи 0), отримаємо: $32\times 32\times 10\times 10\times 10=1024000$.

Задача 4. Нехай в попередньому прикладі треба ставити букви, що мають аналоги в латинському алфавіті, а цифри виключають комбінацію 666 (з деяких містичних міркувань).

Розв'язок: 1) Подивимось, які букви українського алфавіту можуть бути використані: А,Б,В,Г,Д,Е,Є,Ж,З,И,І,Ї,Й,К,Л,М,Н,О,П,Р,С,Т,У,Ф,Х,Ц,Ч,Ш,Щ.Ь,Ю,Я. Всього 12. 2) Щодо цифр, зауважимо, що на перших двох місцях може бути будь-яка цифра, включаючи 6, а на третьому – виключаючи 6 (може бути 661, 669 і т.д.). Маємо: $12\times 12\times 10\times 10\times 9=129600$.

Задача 5. Скільки чотиризначних чисел можна скласти, використовуючи цифри 1,2,3,4,5, якщо а) ніяка цифра не зустрічається більше, ніж один раз; б) повторення цифр можливе; в) числа повинні бути непарними і всі цифри ф них різні.

Розв'язок. Зауважимо, що перераховувати всі складені числа не потрібно, а необхідно лише вказати їх кількість. Приклади а)-б) наведемо без ґрунтовних розміркувань:

а) $5\times 4 \times 3 \times 2$=120 чотиризначних чисел (без повторень цифр);

б) $5\times 5 \times 5 \times 5$=54=625 чотиризначних чисел (з повторенням цифр);

в) якщо число повинно бути непарним, тоді остання його цифра може бути або 1, або 3, або 5. Тому на четверте місце можна поставити одну з них.

Після цього на четверте, третє, друге та перше місце можна поставити чотири, три та дві цифри відповідно (бо повторення цифр не може бути). Маємо: $2\times 3 \times 4 \times 3$=72.

Задача 6. Для виготовлення піци до сиру додають різні компоненти, що надають той або інший смак страви. Білл має перець, цибулю, сосиски, гриби та анчоуси, причому, по його розумінню, все це разом чи окремо можна додавати до сиру. Скільки типів піци може виготовити Білл?

Зауваження. В розпорядженні кухаря п'ять компонент, причому відносно кожної може бути розглянуто два випадки – включення до піци чи ні. Отже, всього випадків $2\times 2 \times 2 \times 2 \times$=25=32.

Задача 7. В нашому розпорядженні є три різні прапорці для передачі певних сигналів, причому сигнал складається не менше ніж з двох прапорців і порядок їхній при цьому враховується. Скільки різних сигналів може бути подано таким чином?

Розв'язок. Домовимось першою дією вважати сигнал, який складається з двох піднятих прапорців. За принципом множення його можна виконати $3\times2=6$ способами. Інша дія – підйом трьох прапорців; вона може бути виконана $3\times2\times1=6$ способами. Оскільки ми виконуємо або першу дію, або другу, але не першу, а потім другу, то принцип множення в даному випадку не діє. Наші дії взаємно виключають одна одну: вони не можуть бути виконані одночасно. Тому загальна кількість сигналів складає 6+6=12.

Діаграми Ейлера-Венна

Завдання 1. У молодіжному таборі в неділю мали відбутися змагання з легкої атлетики. Напередодні цієї події несподівано прийшов лист з іншого табору :

"Здрастуйте , хлопці! Ми хочемо взяти участь у ваших змаганнях . Наша команда складається з волейболістів , бігунів , стрибунів і метальників . Всі бігуни являються стрибунами , а всі стрибуни являються або метальниками , або бігунами . Але серед тих метальників , які являються ще й стрибунами , немає бігунів. метальника у нас в два рази менше , ніж стрибунів , і на два менше , ніж бігунів. Бігуни складають третю частину всієї команди , а волейболістів в два рази більше , ніж тих хлопців , які являються одночасно і стрибунами і метальниками .

Ми приїдемо в суботу ввечері. Приготуйте , будь ласка , нічліг для всієї нашої команди , - Ваші друзі "

Звістка про прибуття гостей була зустрінута з захопленням. Утруднення виникло тільки з їх розміщенням на нічліг. Потрібно було знати число очікуваних гостей , але саме про це в листі нічого не було сказано. Тим паче з'ясувати все ж вдалося. Скільки гостей мало приїхати ?

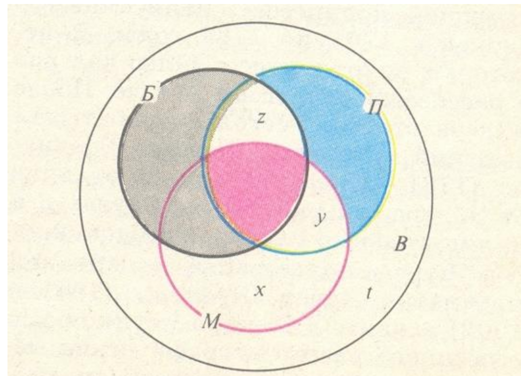


Рис. 1.

<u>Рішення .</u> Розглянемо рис.1.

У ньому велике коло зображує безліч всіх гостей. Кола Б , П , М зображують відповідно безлічі , стрибунів метальників . Неважко зрозуміти і сенс окремих частин цих кіл. Так , наприклад , загальна частина кіл Б і П зображує безліч тих . Хлопців , які являються і бігунами , і стрибунами . Серед гостей були ще й волейболісти , але (як випливає з листа) жоден з волейболістів не був ні бігуном , ні стрибуном , ні метальником . Значить , вся область поза кіл Б , П , М припадає на частку волейболістів . Тому ця область позначена буквою В. Відомо , що всі бігуни були стрибунами . Це означає , що вся область Б повинна знаходитися всередині П. Щоб ця умова була виконана , треба заштрихувати ту частину Б , яка виходить за межі П , - відзначаючи цим , що заштрихована частина є порожнім безліччю . Відомо також , що всі стрибуни є або метальниками , або бігунами . Значить , коло П цілком повинен знаходитися всередині області , що складається з Б і М. Тому ту частину П , яка виходить за межі цієї області , слід заштрихувати .

Відомо ще , що серед тих метальників , які були ще й стрибунами , немає бігунів. Значить , із загальної частини кіл М і П треба виключити ту частинку , яка знаходиться всередині Б , - її теж треба заштрихувати .

У не заштриховані осередках запишемо літери x , y , z , t , які будуть позначати число хлопців, що займаються відповідними видами спорту. Число метальників в два рази менше числа стрибунів . Значить , 2 (x + y) = y + z . Число метальників на два менше числа бігунів. Значить , . Бігуни становлять 1 / 3 всієї команди. Тому 3z = x + y + z + t . Число волейболістів в два рази більше числа хлопців , які одночасно є стрибунами і метальниками . Значить , t = 2y . Вийшла система чотирьох рівнянь з чотирма невідомими. Вирішивши цю систему , знайдемо : x = 2 , y = 6 , z = 10 , t = 12 . Отже , кількість гостей дорівнює 2 +6 +10 +12 = 30

Відповідь: на змагання мала приїхати команда з 30 осіб.

Задача 2. При школі була присадибну ділянку з теплицею . У суботу група хлопців працювала на цій ділянці . Вони ремонтували теплицю і поливали огірки , помідори і капусту. По закінченні роботи потрібні були відомості про число працювавших, але думки хлопців розійшлися і дізнатися нічого не вдалося.

Було встановлено тільки наступне . Хлопці , ремонтували теплицю , не займалися поливанням , а хлопці , поливавши овочі , не брали участь у ремонті теплиці. Ніхто з хлопців не поливав одночасно огірки та капусту. Деякі хлопці поливали помідори і огірки , деякі поливали помідори і капусту , але не було таких хлопців , які поливали б тільки помідори. Огірки поливало 7 осіб , а помідори - 4. Число хлопців , які ремонтували теплицю , було на 2 менше числа хлопців , поливали тільки огірки. Подвоєне число хлопців , поливавших тільки капусту , було на 1 більше потроєного числа тих хлопців , які поливали тільки огірки.

Скільки ж хлопців було в суботу на присадибній ділянці?

Рішення . Намалюємо відповідну діаграму Ейлера- Венна (рис.3).

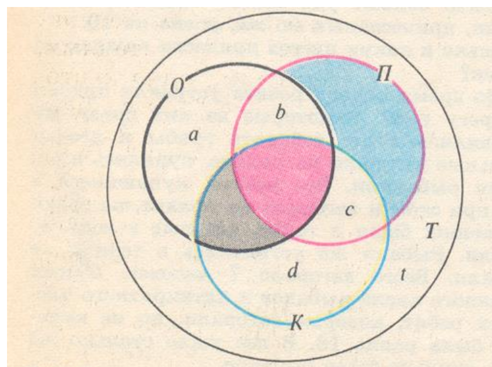


Рис. 3.

Кола О, П , К зображують безлічі хлопців ,які поливали відповідно огірки , помідори і капусту. Теплицю ремонтували ті і тільки ті хлопці , що не були зайняті на поливанні овочів. Значить , область , розташована поза кіл О, П , К, зображує безліч хлопців , які ремонтували теплицю. Ця область позначена буквою Т.

Ніхто з хлопців не поливав одночасно огірки та капусту. Тому загальну частину кіл О і К треба заштрихувати . Ніхто з хлопців не поливав тільки помідори. Значить , ту частину круга П , яка знаходитися поза кіл О і К, теж потрібно заштрихувати . Чисельні значення незаштриховані осередків позначимо літерами a , b , c , d , t . Буква a , наприклад , означає число хлопців , поливали тільки огірки ; буква b позначає число хлопців , поливали і огірки, і помідори. Сенс інших букв ясний з малюнка. Тепер, за відомим даним , можна записати рівняння :

$$\begin{cases} a+b=74; \\ b+c=4; \\ a=t+2; \\ 2d=3a+1. \end{cases}$$

Вийшла невизначена система чотирьох рівнянь з п'ятьма невідомими. Щоб вирішити цю систему, приймемо a за параметр, якому ми самі можемо приписати якесь конкретне значення. Тоді залишиться чотири невідомих. Вирішивши систему відносно цих невідомих, ми, отримаємо наступні співвідношення: $b = 7\text{-}a$, $c = a\text{-}3$, $d = (3a+1)/2$, $t = a\text{-}2$. Тепер, здавалося б, надавши параметру a якесь довільне значення, ми зможемо обчислити і відповідні значення невідомих b, c, d, t. А так як вибір значення параметра a начебто зовсім довільний, то ми отримаємо нескінченну безліч рішень. Насправді ж це не так. Справа в тому, що невідомі повинні бути цілими невід'ємними числами. А це означає, що повинні виконуватися такі додаткові умови: $7\text{-}a \geq 0$, $a\text{-}3 \geq 0, 3a + 1 \geq 0, a - 2 \geq 0, \frac{3a+1}{2} -$ ціле число. Остання умова означає, що 3a +1 має бути парним числом, а це можливо тільки тоді, коли a - непарне число.

Вирішивши систему наведених вище нерівностей, отримаємо $3 \leq a \leq 7$; a - непарне число. Значить, для параметра a вийшло три значення: 3, 5, 7. Але при a = 3 отримаємо c = 0, а при a = 7 отримаємо b = 0, що неможливо, так як b і c позначають число хлопців, поливали крім помідор ще капусту чи огірки, а за умовою ці множини не можуть бути порожніми. Отже, для параметра a залишається одне-єдине значення a = 5. Решта невідомі візьмуть тоді такі значення: b = 2, c = 2, d = 8, t = 3. Таким чином, загальне число хлопців, які працювали на ділянці, дорівнює 5 +2 +2 +8 +3 = 20

Відповідь: на ділянці в суботу працювало 20 хлопців.

Графи

Графи - чудові математичні об'єкти, з їх допомогою можна вирішувати дуже багато різних, зовні не схожих один на одного завдань. У математиці існує цілий розділ - теорія графів, який вивчає графи, їх властивості та застосування. Ми ж обговоримо тільки самі основні поняття, властивості графів і деякі способи вирішення завдань.

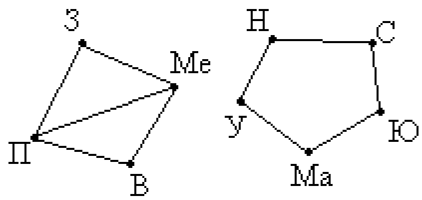
Поняття графа

Розглянемо два завдання.

Завдання 1. Між дев'ятьма планетами сонячної системи встановлено космічне повідомлення. Рейсові ракети літають за наступними маршрутами: Земля - Меркурій; Плутон - Венера; Земля - Плутон; Плутон - Меркурій;

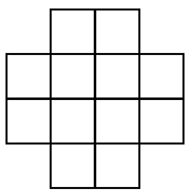
Меркурій - Відні; Уран - Нептун; Нептун - Сатурн; Сатурн - Юпітер; Юпітер - Марс і Марс - Уран. Чи можна долетіти на рейсових ракетах з Землі до Марса?

Рішення: Намалюємо схему умови: планети зобразимо точками, а маршрути ракет - лініями.



Тепер відразу видно, що долетіти з Землі до Марса не можна.

Завдання 2. Дошка має форму подвійного хреста, який виходить, якщо з квадрата 4x4 прибрати кутові клітини.

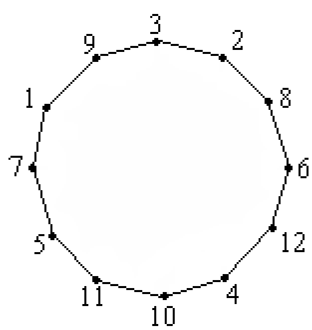


Чи можна обійти її ходом шахового коня і повернутися на вихідну клітку, побувавши на всіх клітинах рівно по одному разу?

Рішення: Занумеруємо послідовно клітини дошки:

	1	2	
3	4	5	6
7	8	9	10
	11	12	

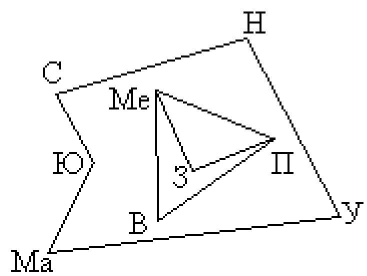
А тепер за допомогою малюнка покажемо, що такий обхід таблиці, як зазначено в умові, можливий:



Ми розглянули дві несхожі завдання. Однак вирішення цих двох завдань об'єднує спільна ідея - графічне представлення рішення. При цьому і картинки, намальовані для кожного завдання, виявилися схожими: кожна картинка - це кілька точок, деякі з яких з'єднані лініями.

Такі картинки і називаються графами. Точки при цьому називаються вершинами, а лінії - ребрами графа. Зауважимо, що не кожна картинка такого виду буде називатися графом. Наприклад. якщо вас попросять намалювати в зошиті п'ятикутник, то такий малюнок графом не буде. Будемо називати що малюнок такого виду, як у попередніх завданнях, графом, якщо є якась конкретна задача для якої такий малюнок побудований.

Інше зауваження стосується виду графа. Спробуйте перевірити, що граф для однієї і тієї ж задачі можна намалювати різними способами; і навпаки для різних завдань можна намалювати однакові з вигляду графи. Тут важливо лише те, які вершини з'єднані один з одним, а які - ні. Наприклад, граф для задачі 1 можна намалювати по-іншому:



Такі однакові, але по-різному намальовані графи, називаються ізоморфними.

<u>Ступені вершин і підрахунок числа ребер графа</u>

Напишемо ще одне визначення : Ступенем вершини графа називається кількість виходять з неї ребер. У зв'язку з цим , вершина , що має парну ступінь , називається парною вершиною , відповідно, вершина , що має непарну ступінь , називається непарної вершиною.

З поняттям ступеня вершини пов'язана одна з основних теорем теорії графів - теорема про чесність числа непарних вершин. Доведемо її ми трохи пізніше , а спочатку для ілюстрації розглянемо завдання .

Завдання 3 . У місті Маленькому 15 телефонів. Чи можна їх з'єднати проводами так , щоб кожен телефон був з'єднаний рівно з п'ятьма іншими?

Рішення: Припустимо , що таке з'єднання телефонів можливо. Тоді уявімо собі граф , в якому вершини позначають телефони , а ребра - дроти , їх з'єднують . Підрахуємо , скільки всього вийде проводів . До кожного телефону підключено рівно 5 проводів , тобто ступінь кожної вершини нашого графа - 5. Щоб знайти число проводів , треба підсумувати ступеня всіх вершин графа і отриманий результат розділити на 2 (тому кожен дріт має два кінця , то при підсумовуванні ступенів кожен дріт буде взято 2 рази). Але тоді кількість проводів вийде різним. Але це число не є цілим . Значить наше припущення про те , що можна з'єднати кожен телефон рівно з п'ятьма іншими , виявилося невірним.

Відповідь . З'єднати телефони таким чином неможливо.

Теорема : Будь граф містить парне число непарних вершин.

Доказ: Кількість ребер графа дорівнює половині суми ступенів його вершин . Так як кількість ребер має бути цілим числом , то сума ступенів вершин повинна бути парною . А це можливо тільки в тому випадку , якщо граф містить парне число непарних вершин.

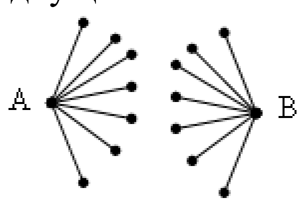
Зв'язність графа

Є ще одне важливе поняття, що відноситься до графів - поняття зв'язності.

Граф називається зв'язковим, якщо з будь-які дві його вершини можна з'єднати шляхом, тобто безперервної послідовністю ребер. Існує цілий ряд завдань, вирішення яких заснована на понятті зв'язності графа.

Задача 4. У країні Сімка 15 міст, кожне з міст з'єднаний дорогами не менше, ніж з сімома іншими. Доведіть, що з кожного міста можна дістатися в будь-який інший.

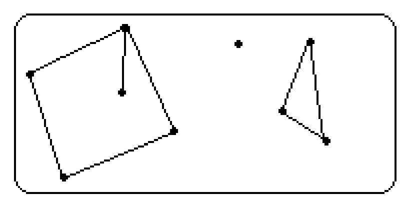
Доказ: Розглянемо два довільних А і В міста і припустимо, що між ними немає шляху. Кожен з них з'єднаний дорогами не менше, ніж з сімома іншими, причому немає такого міста, який був би з'єднаний з обома розглянутими містами (в іншому випадку існував би шлях з А в В). Намалюємо частина графа, відповідну цим містах:



Тепер явно видно, що ми отримали не менше різних 16 міст, що суперечить умові завдання. Значить твердження доведено від супротивного.

Якщо взяти до уваги попереднє визначення, то твердження задачі можна переформулювати і по-іншому: "Довести, що граф доріг країни Сімка зв'язний."

Тепер ви знаєте, як виглядає зв'язний граф. Незв'язний граф має вигляд кількох "шматків", кожен з яких - небудь окрема вершина без ребер, або зв'язний граф. Приклад незв'язного графа ви бачите на малюнку:



Кожен такий окремий шматок називається компонентою зв’язністю графа. Кожна компонента зв'язність являє собою зв'язний граф і для неї виконуються всі твердження, які ми довели для зв'язкових графів. Розглянемо приклад завдання, в якій використовується компонента зв'язності:

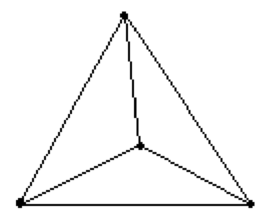
Задача 5. У тридев'ятому царстві тільки один вид транспорту - килим-літак. Зі столиці виходить 21 ковролін, з міста Далекий - одна, а з усіх інших міст, - по 20. Доведіть, що зі столиці можна долетіти в місто Далекий.

Доказ: Зрозуміло, що якщо намалювати граф ковролін Царства, то він може бути незв'язним. Розглянемо компоненту зв'язності, яка включає в себе столицю Царства. Зі столиці виходить 21 ковролін, а з будь-яких інших міст, крім міста Далекий - по 20, тому, щоб виконувався закон про парному числі непарних вершин необхідно, щоб і місто Далекий входив в цю ж саму компоненту зв'язності. А так як компонента зв'язності - зв'язний граф, то зі столиці існує шлях по ковроліну до міста Далекий, що й потрібно було довести.

<u>Графи Ейлера</u>

Ви напевно стикалися з завданнями, в яких потрібно намалювати будь-яку фігуру не відриваючи олівець від паперу і проводячи кожну лінію тільки один раз. Виявляється, що таке завдання не завжди можна залагодити, тобто існують фігури, які зазначеним способом намалювати не можна. Питання розв'язності таких задач також входить в теорію графів. Вперше його досліджував в 1736 році великий німецький математик Леонард Ейлер, вирішуючи завдання про Кенигсбергских мостах. Тому графи, які можна намалювати зазначеним способом, називаються ейлеровими графами.

Задача 6. Чи можна намалювати зображений на малюнку граф не відриваючи олівець від паперу і проводячи кожне ребро рівно один раз?



Рішення. Якщо ми будемо малювати граф так, як сказано в умові, то в кожну вершину, крім початкової і кінцевої, ми увійдемо стільки ж разів, скільки вийдемо з неї. Тобто всі вершини графа, окрім двох повинні бути парними. У нашому ж графі є три непарні вершини, тому його не можна намалювати зазначеним в умові способом.

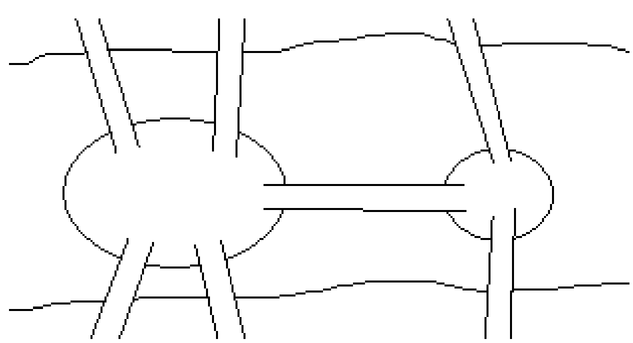
Зараз ми довели теорему про ейлерові графи:

Теорема: Ейлеров граф має мати не більше двох непарних вершин.

І на закінчення - завдання про Кенигсбергскі мости.

Задача 7. На малюнку зображена схема мостів міста Кенігсберга.

Чи можна здійснити прогулянку так, щоб пройти по кожному мосту рівно 1 раз?



Завдання до теми "Графи"

<u>Поняття графа.</u>

1. На квадратній дошці 3х3 розставлені 4 коня так, як показано на рис.1. Чи можна зробивши кілька ходів кіньми, переставити їх в положення, показане на рис.2?

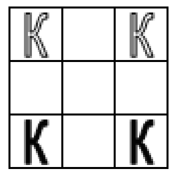


Рис 1

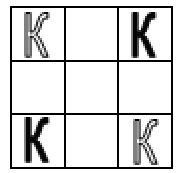
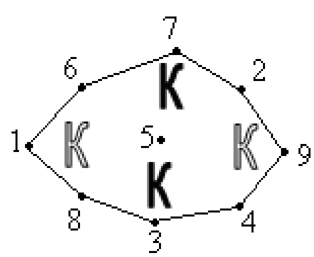


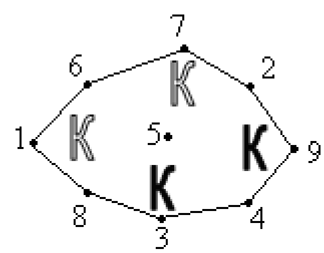
Рис.2

<u>Рішення.</u> Занумеруємо клітини дошки, як показано на малюнку:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Кожній клітці поставимо у відповідність точку на площині і, якщо з однієї клітини можна потрапити в іншу ходом шахового коня, то відповідні точки з'єднаємо лінією. Вихідна і необхідна розстановки коней показані на малюнках:





При будь-якій послідовності ходів кіньми порядок їх проходження, очевидно, змінитися не може. Тому переставити коней потрібним чином неможливо.

2. У країні Цифра є 9 міст з назвами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Мандрівник виявив, що два міста з'єднані авіалінією в тому і тільки в тому випадку, якщо двозначне число, утворене назвами міст, ділиться на 3. Чи можна долетіти по повітрю з міста 1 в місто 9?

<u>Рішення.</u> Поставивши у відповідність кожному місту точку і з'єднавши точки лінією, якщо сума цифр ділиться на 3, отримаємо граф, в якому цифри 3, 5, 9 пов'язані між собою, але не пов'язані з іншими. Значить долетіти з міста 1 в місто 9 можна.

<u>Ступені вершин і підрахунок числа ребер.</u>

3 . У державі 100 міст до з кожного міста виходить 4 дороги. Скільки всього доріг в державі.

<u>Рішення .</u> Підрахуємо загальну кількість виходять міст доріг - 100. 4 = 400. Однак при такому підрахунку кожна дорога порахована 2 рази - вона виходить з одного міста і входить в інший. Значить всього доріг в два рази менше , тобто 200.

4 . У класі 30 осіб. Чи може бути так , що 9 осіб мають по 3 одного, 11 - по 4 друга , а 10 - по 5 друзів?

Відповідь . Немає (теорема про парність числа непарних вершин) .

5 . У короля 19 васалів. Чи може виявитися так , що у кожного васала 1 , 5 або 9 сусідів?

Відповідь . Ні, не може.

6 . Чи може в державі, в якій з кожного міста виходить рівно 3 дороги , бути рівно 100 доріг ?

<u>Рішення</u> . Підрахуємо число міст. Число доріг дорівнює числу міст x , помноженому на 3 (число виходять з кожного міста доріг) і розділеному на 2 (див. завдання 3). Тоді 100 = 3x / 2 => 3x = 200 , чого не може бути при натуральному x . Значить 100 доріг в такій державі бути не може.

7 . Доведіть , що число людей, що жили будь-коли на Землі і зробили непарне число рукостискань , парне.

Доказ безпосередньо випливає з теореми про парність числа непарних вершин графа.

<u>Зв'язність</u>

8. У країні з кожного міста виходить 100 доріг і з кожного міста можна дістатися до будь-якого іншого. Одну дорогу закрили на ремонт. Доведіть, що і тепер з будь-якого міста можна дістатися до будь-якого іншого.

Доказ. Розглянемо компоненту зв'язності, до якої входить один з міст, дорогу між якими закрили. По теоремі про парність числа непарних вершин у неї входить і друге місто. А значить і раніше можна знайти маршрут і дістатися з одного з цих міст в інший.

<u>Графи Ейлера</u>

9. Є група островів, з'єднаних мостами так, що від кожного острова можна дістатися до будь-якого іншого. Турист обійшов всі острови, пройшовши по кожному мосту рівно 1 раз. На острові триразово він побував тричі. Скільки мостів веде з триразово, якщо турист

а) ні з нього почав і не на ньому закінчив?

б) з нього почав, але не на ньому закінчив?

в) з нього почав і на ньому закінчив?

10. На малюнку зображений парк, розділений на кілька частин парканами. Чи можна прогулятися по парку і його околицях так, щоб перелізти через кожен паркан рівно 1 раз?