ДЕПАРТАМЕНТ ОСВІТИ, НАУКИ ТА МОЛОДІ
МИКОЛАЇВСЬКОЇ ОБЛДЕРЖАДМІНІСТРАЦІЇ

МИКОЛАЇВСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ЦЕНТР
НАУКОВО-ТЕХНІЧНОЇ ТВОРЧОСТІ УЧНІВСЬКОЇ МОЛОДІ

МИКОЛАЇВСЬКЕ ТЕРИТОРІАЛЬНЕ ВІДДІЛЕННЯ
МАЛОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ

відділення математики

Задачі – «родзинки» та задачі – «фортеці»

Керівник гуртка:

Гозян Наталія Іванівна

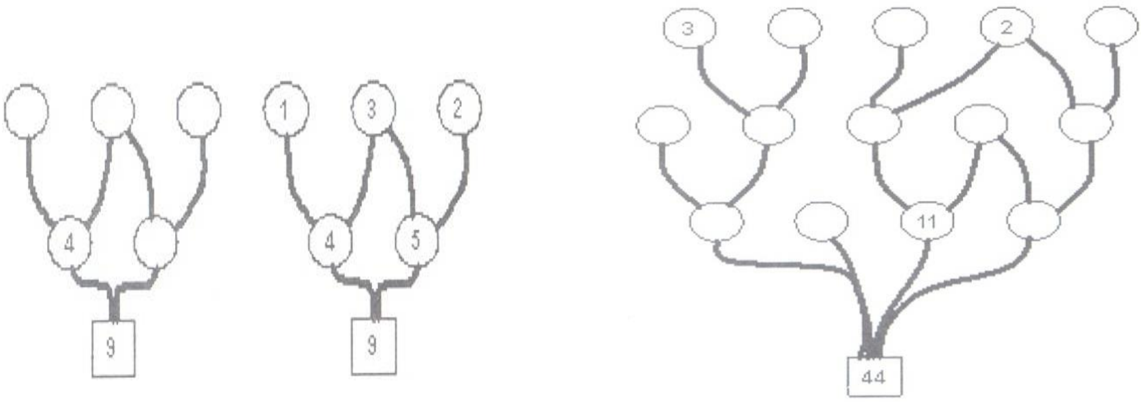
вчитель математики

Миколаїв 2013

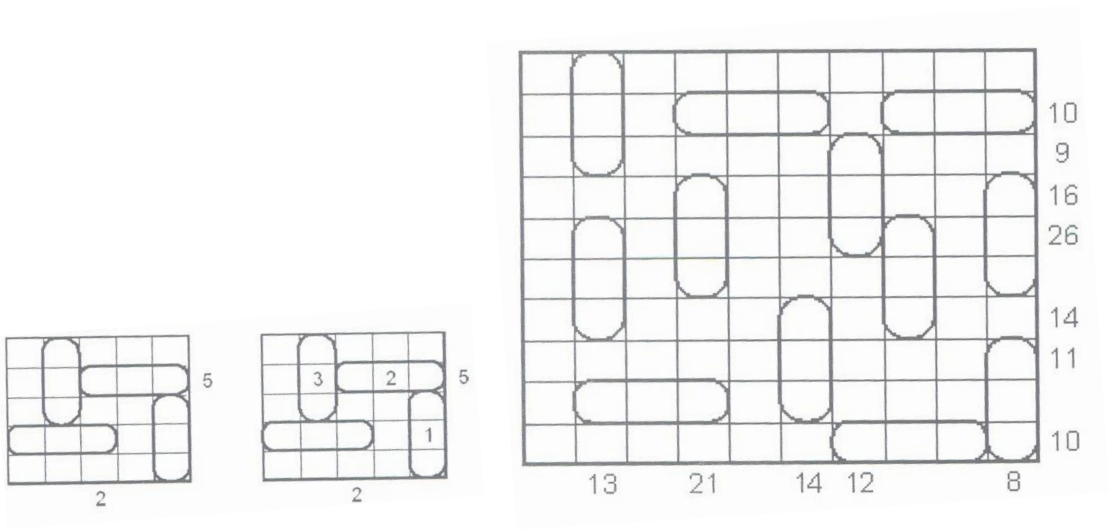
Зміст

Текстові ломиголовки

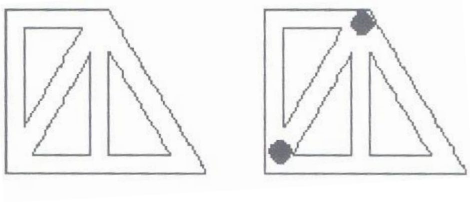
Завдання 1. **Дерево.** У кружечки необхідно вписати числа від 1 до14 кожне рівно по одному разу. Якщо від кружечка відходять лінії нагору (гілки), то число в кружечку дорівнює сумі чисел на цих гілках. Число в «корені» теж є сумою чисел га гілках «нижнього ярусу». Деякі числа вже дані.

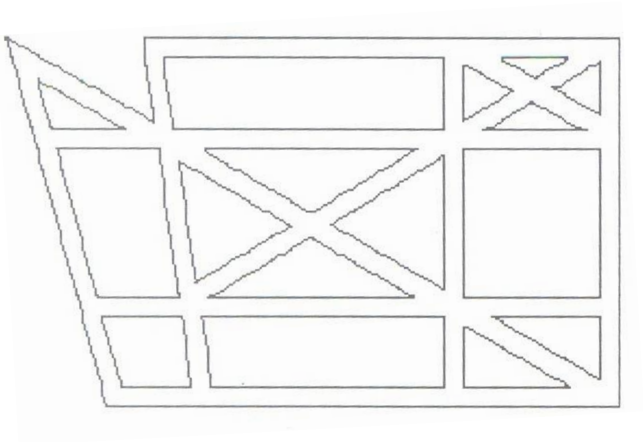


Завдання 2. ***Пігулки.*** На полі розміщено 12 пігулок. Десять із них мають номери від 1 до 10 (по одному разу), дві пігулки не мають номерів. Числа по краях квадрата вказують суму номерів пігулок, що зустрічаються в даному рядку або стовпчику. Відновіть номери пігулок.

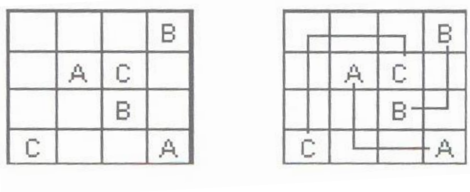


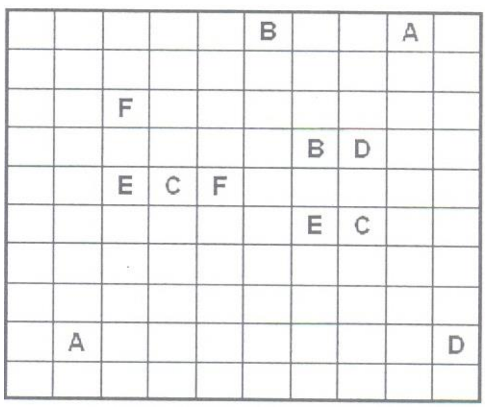
<u>Завдання 3.</u> ***<u>Поліцейські.</u>*** Перед вами – план невеликого міста. Поліцейський, що стоїть на перехресті, проглядає всі вулиці, що сходяться в цьому перехресті. Необхідно розмістити на перехрестях чотирьох поліцейських, щоб вони могли бачити всі вулиці міста.



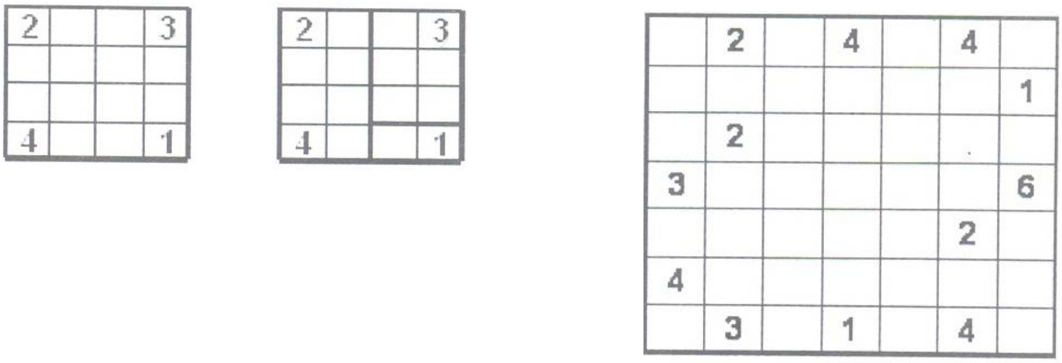


<u>Завдання 4.</u> ***<u>Пари.</u>*** З'єднайте однакові букви лініями, що проходять через центри клітинок. Лінії проходять із клітинки в клітинку горизонтально або вертикально. Лінії не повинні перетинатися. Кожна клітинка має використовуватися рівно один раз.

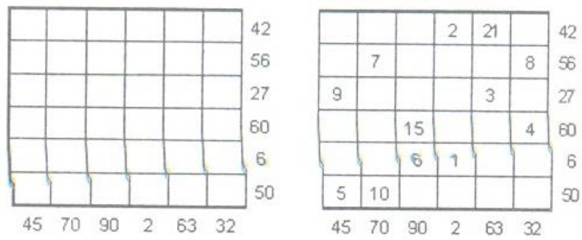


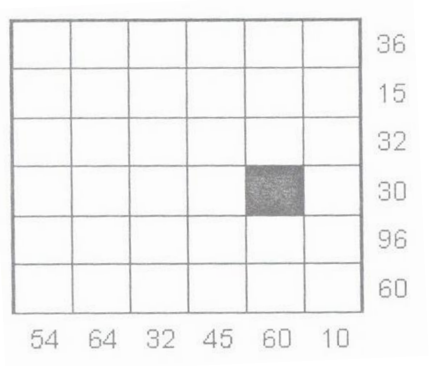


Завдання 5. ***Прямокутники.*** Розділіть сітку на прямокутники так, щоб кожен прямокутник містив як мінімум одне число. Кожне число в прямокутнику має дорівнювати довжині однієї з його сторін (прямокутник 2×4 містить числа 2 і 4 у будь-якій кількості, квадрат 3×3 - 3 у будь-якій кількості). Усі прямокутники мають бути різних розмірів, незалежно від орієнтації (не можна одночасно використовувати прямокутники 3 ×1 і 1 ×3).

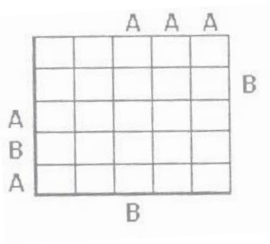


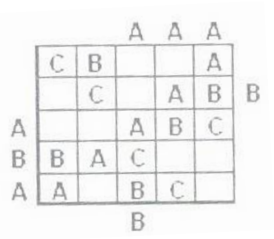
Завдання 6. ***Множення.*** У квадраті необхідно розставити різні цілі числа – по два числа в кожному рядку й стовпчику. Числа по краях квадрата показують добуток чисел, що знаходяться у даному рядку або стовпчику.

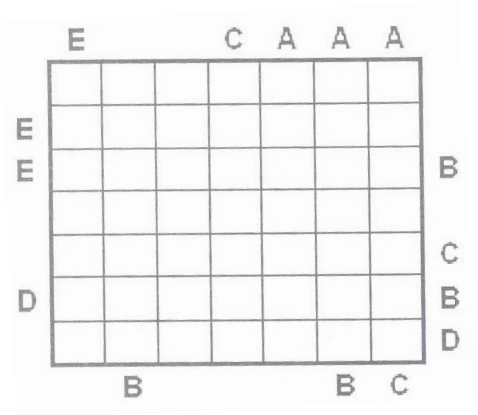




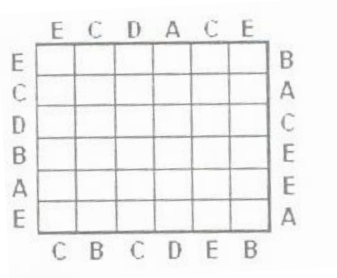
<u>Завдання 7.</u> ***<u>Перші зустрічні.</u>*** У порожні клітинки таблиці необхідно вписати букви А В С Д Е (у прикладі А В С) так, щоб у кожному рядку й у кожному стовпчику всі букви зустрічалися рівно по одному разу. Деякі клітинки залишаються порожніми. Букви по краях квадрата вказують, яка з букв зустрінеться ПЕРШОЮ в даному рядку або стовпчику в цьому напрямку.

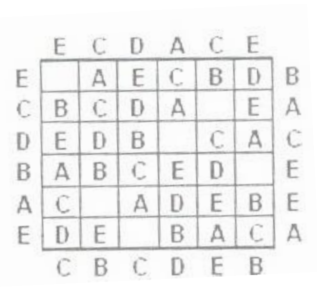


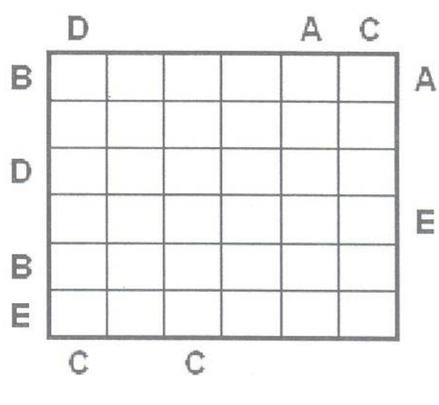




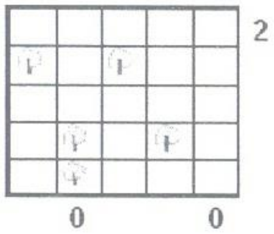
Завдання 8. ***<u>Другі зустрічні.</u>*** У порожні клітинки таблиці необхідно вписати букви А В С Д Е так, щоб у кожному рядку всі букви зустрічалися рівно по одному разу. Деякі клітинки залишаться порожніми. Букви по краях квадрата вказують, яка з букв зустрінеться ДРУГОЮ у даному рядку або стовпчику в цьому напрямку.

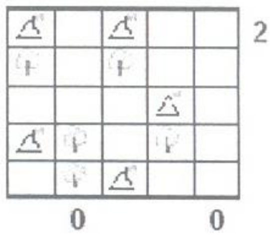


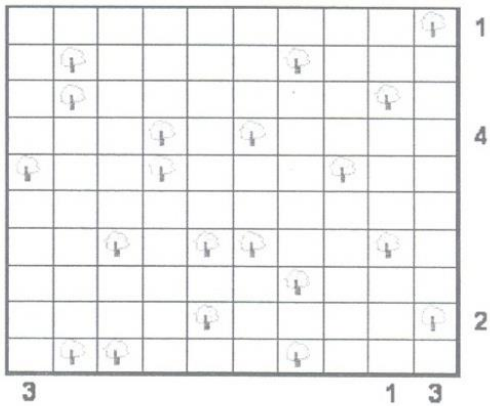




<u>Завдання 9. Намети.</u> Сітка являє собою план лісі, у якому розміщена деяка кількість дерев. До кожного дерева прив'язано рівно один намет (намет перебуває в клітинці, яка межує із деревом по стороні). Клітинки з наметами не можуть торкатися одна одної ні стороною, ні кутом. Числа по краях «лісу» показують, скільки наметів знаходиться в даному рядку або стовпчику.







<u>Завдання 10. Сума.</u> У наведеній числовій сітці необхідно розмістити наведену фігуру. Фігуру можна повертати, але не можна віддзеркалювати (перевертати). Необхідно максимізувати суму накритих фігурою чисел.

7	5	1	0	2	8	2	0
8	1	6	4	0	6	2	8
4	8	2	5	3	4	2	1
8	6	5	1	3	2	8	2
6	0	9	5	5	0	5	8
8	1	2	8	2	8	1	1
0	1	9	3	8	5	2	1
9	4	8	9	5	4	9	3

Оцінка = Сума/2 - 25

У наведеному прикладі Сума = 54, оцінка = 2 бали.

Задачі для наймолодших школярів

Задача 1. Скільки років дітям? В родині є троє дітей. Степану вдвічі більше років, ніж буде Оксані тоді, коли Миколі виповниться стільки років, скільки Степану зараз. Скільки років зараз Степану, Оксані й Миколі, якщо разом їм 19 років?

Задача 2. Хто де живе? На острові Трисельському є три села: Правдово, Чергуново та Неправдово. Відомо, що жителі першого села завжди кажуть правду, мешканці третього села завжди кажуть неправду, а у відповідях чергуновців неправда чергується з правдою (перша відповідь чергуновця може бути як правдою, так і неправдою).

Якось приїжджий зустрів п’ятьох остров’ян, яким він за характерними рисами їхньої зовнішностіудумці дав такі прізвиська: Косооко, Борода, Кирпань, Червонощок, Довговух. Бажаючи з’ясувати , в яких селах ці люди живуть, приїжджий попрохав двох з них розповісти, хто з якого села родом.

Косооко відповідав, що Борода – чергуновець, Кирпань – правдовець, Червонощок теж родом із Чергуново, а Довгоух - з Неправдово.

Борода ж твердив, що Косооко – чергуновець, Кирпань із Неправдово, Червонощок – правдовець, а Довгоух із Чергуново.

Чи можна на підставі отриманих відповідей зробити правильні висновки про рідне село кожного з острів’ян?

Задача 3. Розподіл ролей. У шкільному драмгуртку вирішили ставити «Лісову пісню» Лесі Українки. Та при розподілі жіночих ролей виникла суперечка. Оксана сказала, що погоджується грати лише Русалку або Мавку. Те ж саме заявила й Леся. Марійка сказала, що теж мріє про роль Русалки. У крайньому випадку погоджується на роль Матері Лукаша. Роль Мавки дуже просила Ганна, але сказала, що погоджується уступити її, якщо їй нададуть можливість зіграти роль Килини.

– Ні, я буду Килиною, - заявила Катя, - а ні, то дайте мені роль Русалки Польової.

Чи можна розподілити ролі так, щоб усі були задоволені?

<u>Задача 4. Футбольний матч.</u> У футбольних змаганнях з футболу за кубок змагалися три команди: «Альфа», «Бета» і «Гамма».Змагання проводили у два кола. У першому «Альфа» жодного разу не програла, «Бета» не мала нічиїх, а «Гамма» жодного разу не виграла.

У другому колі «Альфа» жодного разу не виграла. «Бета» - не програла, а «Гамма» не зіграла внічию. У результаті для визначення переможця мав відбутися додатковий матч.

Як зіграли у другому колі «Альфа» і «Бета»?

<u>Задача5.</u> ***<u>Які числа перемножили?</u>*** На класній дошці виконали дію множення. Потім частину цифр стерли і замінили зірочками. Пропонується відновити стерті цифри:

```
    * * *
      * 8
  -------
    * * *
* * * *
---------
* * 2 * 0
```

Логічні задачі та ломи головки

Задача1. Скільки братів та сестер?

Максим та Світлана живуть в одному будинку. У Максима братів та сестер порівну. У Світлани сестер втроє більше, ніж у Максима, а всього стільки, скільки дітей у батьків Максима. Визначте, скільки братів та сестер у Максима та скільки сестер у Світлани?

Задача 2. Визначте час. Батько зателефонував дочці і сказав,що він скоро буде. Світлана уточнила : «А о котрій годині?» Батько відповів: «Поліч, коли я приїду, до кінця доби залишиться втроє менше того часу, який пройде від її початку». Визначте, о котрій годині батько Світлани буде дома?

Задача 3. Сума чисел. Сума п'яти послідовних чисел дорівнює числу 1989. Знайдіть ці числа.

Задача 4. Унікальне число. Знайдіть найменше число, яке ділиться без залишку на наступні 9 чисел : 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 та10.

Задача 5. Визначте множник та множене. Добуток двох чисел дорівнює числу, яке записується трьома послідовними числами 123. Чому дорівнюють множник та множене, якщо відомо, що обидва вони менші числа 3?

Задача 6. «Полкан» та «Доклад» (криптографічна ломиголовка). Розшифруйте цікаві приклади на додавання, в яких однаковими буквами зашифровані однакові цифри, а різними буквами – різні цифри.

```
ПОЛКАН      ДОКЛАД
ПОЛКА        ОКЛАД
ПОЛК          КЛАД
ПОЛ            ЛАД
ПО              АД
П                Д
________   _________
СУММА'Н'  СУММА 'А'
```

Відповіді та вказівки.

1. У максима 1 брат і 1 сестра. У Світлани 3 сестри. *Розв'язок.* В сім'ї Максима А сестер, у Світлани – 3А. Всього дітей у першої сім'ї – 2А+1. За умовою задачі зА=2А+1. Звідси визначаємо. Чому дорівнює А: 3А-2А=1, А=1. Звідси зробимо висновок: у Максима 1 брат і 1 сестра, у Світлани – 3 сестри.

2. О шостій годині вечора (18-00) Одна частина доби складає: 24:4=6 годин. Три частини відповідно - 3✕6=18

3. Шукані числа: 395, 396, 397, 398, 399

4. Шукане число: 2520

5. -41 та -3. ((-41)✕(-3)=123)

6. 173802 + 17380 + 1738 + 17 + 1 = 964402, 173802 + 17380 + 1738 + 173 + 17 + 1 = 964405

Таємниці натуральних чисел. Подільність суми, різниці, добутку.

Задача 1. Число a+1 ділиться на 3. Довести, що число 5+8a також ділиться на 3.

Задача 2. Число a+2 і 35-b ділиться на 11. Довести, що число a+b також ділиться на 11.

Задача 3. Число a^2 ділиться на a+b. Довести, що число b^2 також ділиться на a+b.

Задача 4. Кожне з чисел a+b і ab ділиться на число c. Довести, що

а) a^2+b^2 ділиться на c,

б) $a^3 + b^3$ ділиться на c^2.

Задача 5. Довести, що число $a^4 + 4b^4$ ділиться на $a^2+2ab+2b^2$.

Задача 6. Довести, що число a^3 – a ділиться на 6 при будь-якому цілому a.

Задача 7. Довести, що число a^3 – a ділиться на 24 при будь-якому непарному a.

Задача 8. Число a+ b +c ділиться на 6. Довести, що число $a^3 + b^3 + c^3$ також ділиться на 6.

Задача 9. Довести, що при кожному цілому a число a^3-3a^2+2a ділиться на 6.

Задача10. Довести, що число a^5-5a^3+4a ділиться на 120 при будь-якому цілому a.

Розв'язання задач.

Задача 1. Зауважимо, що 5+8a=5(a+1)+3a. Оскільки a+1 ділиться на 3, то згідно з теоремою 1 число 5(a+1) =3a ділиться на 3.

Задача 2. Зауважимо, що згідно з теоремою 1 число c=(a+2)-(35- b)=(a+ b)-33 ділиться на 11. Тому a+ b=c+33 ділиться на11.

Задача 3. Відзначимо, що $b^2 = a^2 - (a^2 - b^2) = a^2 - (a-b)(a+b)$, звідки випливає, що b^2 ділиться на a+ b бо за припущенням a^2 ділиться на a+b.

Задача 4. 4а. Маємо $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$. Оскільки a+b і ab діляться на c, то $a^2 + b^2$ ділиться на c.

4б. Оскільки $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ і числа $a^2 + b^2$, ab та a+ b діляться на c, то $a^3 + b^3$ ділиться на c^2.

Задача 5. Маємо $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$.

Задача 6. Відзначимо, що $a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a-1)a(a+1)$. Добуток трьох послідовних чисел ділиться на 3. Справді, якщо a ділиться на 3, то a=3k і тому (a-1)a(a+1)=(3k-1) 3k (3k+1)=3(3k-1) k (3k+1) також ділиться на 3. Якщо a дає в остачі 1, то a=3k+1 і (a-1)a(a+1)= 3k (3k+1) (3k+2) ділиться на 3. Якщо ж a дає в остачі 2, то a=3k+2 і (a-1)a(a+1)= (3k+1) (3k+2) (3k+3)=3(3k+1) (3k+2) (k+1) ділиться на 3. З двох послідовних цілих чисел a-1 і a одне ділиться на 2. Тому (a-1)a(a+1) ділиться на 6.

Задача 7. Вже доведено, що a^3 –a ділиться на 3. Нехай a непарне число, a=2r+1, де r- ціле число. Тоді a^3 –a=(a-1)a(a+1)= 2r(2r+1)(2r+2)=4(2r+1) r (r+1). З двох послідовних чисел r і r+1 одне ділиться на 2. Тому a^3 –a ділиться на 8.

Задача 8. Маємо $a^3 + b^3$+c^3=(a^3 –a)+($b^3 - b$)+($c^3 - c$)+(a+ b +c). Оскільки числа a^3 –a, $b^3 - b$, $c^3 - c$ та a+ b +c діляться на 6, то і $a^3 + b^3$+c^3 діляться на 6.

Задача 9. Вказівка: a^3 -3a^2+2a = a^3 - a - 3a(a-1)

Задача 10. Вказівка: a^5 -5a^3+4a = a $[\![(a^4 - a^2) - 4(a^2 - 1)]\!]$ =a($a^2 - 1$)($a^2 - 4$)=(a-2)(a-1)a(a+1)(a+2). **Теорема 1.** Якщо числа a і b діляться на c, то їх сума a+ b і різниця a+ b також діляться на c.

Комбінаторика

Задача 1. Скількома способами можна розташувати на полиці три книги?(A,B, C)

<u>Розв'язок:</u> Один із шляхів розв'язку цієї задачі полягає в тому, що ми випишемо всі можливі комбінації та підрахуємо їх. Розміркуємо так. В задачі необхідно заповнити три місця на полиці – зобразимо їх таким чином: На перше місце може бути поставлено книгу A, або B, або C. Тому перше місце можно заповнити трьома способами.

Для кожного з трьох випадків заповнення першого місця ми маємо лише два варіанта заповнення другого місця тому, що у нас залишилось лише дві з трьох книжок, і ми можемо взяти будь-яку з них. Таким чином перші два місця ми можемо заповнити 2×3 або шістьма способами. Нарешті, для кожного з шести варіантів заповнення перших двох місць існує лише один варіант заповнення третього, адже лишається тільки одна книга.

Отже, всі три місця ми можемо заповнити 6×1 або шістьма способами і наш

малюнок виглядатиме так: 3 2 1

Загальну кількість розміщень отримаємо множенням: 3×2×1=6. Зупинімось

на хвилину і з'ясуємо, що означає для нас слово «розміщення». Ми говорили у розглянутому прикладі про розміщення трьох книг на полиці. Але ж буває також розміщення квітів у вазі, плям на скатертині, тощо….

Домовимось, що надалі будемо розглядати лише особливий вид розміщення, а саме лінійне розміщення, тобто таке впорядкування об'єктів (предметів), яке подібне до розміщення точок на прямій і назвемо таке розміщення. Щоб уникнути плутанини «перестановками».

Отже, перестановка – це будь-яке розміщення деякої кількості об'єктів (предметів) у певному лінійному порядку.

Задача 2. Ми маємо не менше трьох екземплярів книги А, не менше трьох екземплярів книги В І не менше трьох екземплярів книги С. Скількома різними способами можна розташувати на полиці три книги, вважаючи, що екземпляри однієї книги не можна розрізнити?

Розв'язок. Оскільки тепер ми маємо по три екземпляри кожної книги, то можливі і такі випадки: ААА, АВВ, СВС та ін.. Перший крок буде таким самим як і в першому прикладі. Друге ж місце можна заповнити вже трьома способами, адже крім двох книг, що залишилися, ми маємо ще один екземпляр книги, яку вже брали раніше. Розмірковуючи так само, побачимо, що і третє місце можна заповнити трьома способами. А всього розміщень буде 3×3×3=27

Узагальнюючи розглянуті приклади, отримаємо універсальний метод розв'язку задач на перестановки.

Задача 3. Номер автомобіля складено з двох літер, за якими йде трьох значне число. Скільки існує різних номерів такого типу?

Розв'язок. Бачимо, що такий автомобільний номер складається з п'ятьох місць, причому на перші два можна поставити будь-які літери (навіть однакові), а на решту три цифри (також без обмежень). Згадавши, що наш алфавіт має 32 літери, а цифр всього 10 (враховуючи 0), отримаємо: $32 \times 32 \times 10 \times 10 \times 10 = 1024000$.

Задача 4. Нехай в попередньому прикладі треба ставити букви, що мають аналоги в латинському алфавіті, а цифри виключають комбінацію 666 (з деяких містичних міркувань).

Розв'язок: 1) Подивимось, які букви українського алфавіту можуть бути використані:

А,Б,В,Г,Д,Е,Є,Ж,З,И,І,Ї,Й,К,Л,М,Н,О,П,Р,С,Т,У,Ф,Х,Ц,Ч,Ш,Щ.Ь,Ю,Я. Всього 12. 2) Щодо цифр, зауважимо, що на перших двох місцях може бути будь-яка цифра, включаючи 6, а на третьому – виключаючи 6 (може бути 661, 669 і т.д.). Маємо: $12 \times 12 \times 10 \times 10 \times 9 = 129600$.

Задача 5. Скільки чотиризначних чисел можна скласти, використовуючи цифри 1,2,3,4,5, якщо а) ніяка цифра не зустрічається більше, ніж один раз; б) повторення цифр можливе; в) числа повинні бути непарними і всі цифри ф них різні.

Розв'язок. Зауважимо, що перераховувати всі складені числа не потрібно, а необхідно лише вказати їх кількість. Приклади а)-б) наведемо без ґрунтовних розміркувань:

а) $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ чотиризначних чисел (без повторень цифр);

б) $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 54 = 625$ чотиризначних чисел (з повторенням цифр);

в) якщо число повинно бути непарним, тоді остання його цифра може бути або 1, або 3, або 5. Тому на четверте місце можна поставити одну з них.

Після цього на четверте, третє, друге та перше місце можна поставити чотири, три та дві цифри відповідно (бо повторення цифр не може бути). Маємо: $2\times 3\times 4\times 3=72$.

Задача 6. Для виготовлення піци до сиру додають різні компоненти, що надають той або інший смак страви. Білл має перець, цибулю, сосиски, гриби та анчоуси, причому, по його розумінню, все це разом чи окремо можна додавати до сиру. Скільки типів піци може виготовити Білл?

Зауваження. В розпорядженні кухаря п’ять компонент, причому відносно кожної може бути розглянуто два випадки – включення до піци чи ні. Отже, всього випадків $2\times 2\times 2\times 2\times=25=32$.

Задача 7. В нашому розпорядженні є три різні прапорці для передачі певних сигналів, причому сигнал складається не менше ніж з двох прапорців і порядок їхній при цьому враховується. Скільки різних сигналів може бути подано таким чином?

Розв'язок. Домовимось першою дією вважати сигнал, який складається з двох піднятих прапорців. За принципом множення його можна виконати $3\times 2=6$ способами. Інша дія – підйом трьох прапорців; вона може бути виконана $3\times 2\times 1=6$ способами. Оскільки ми виконуємо або першу дію, або другу, але не першу, а потім другу, то принцип множення в даному випадку не діє. Наші дії взаємно виключають одна одну: вони не можуть бути виконані одночасно. Тому загальна кількість сигналів складає 6+6=12.

Діаграми Ейлера-Венна

Завдання 1. У молодіжному таборі в неділю мали відбутися змагання з легкої атлетики. Напередодні цієї події несподівано прийшов лист з іншого табору :

"Здрастуйте , хлопці! Ми хочемо взяти участь у ваших змаганнях . Наша команда складається з воллейболістов , бігунів , стрибунів і метальників . Всі бігуни являються стрибунами , а всі стрибуни являються або метальниками , або бігунами . Але серед тих метальників , які являються ще й стрибунами , немає бігунів. метальника у нас в два рази менше , ніж стрибунів , і на два менше , ніж бігунів. Бігуни складають третю частину всієї команди , а волейболістів в два рази більше , ніж тих хлопців , які являються одночасно і стрибунами і метальниками .

Ми приїдемо в суботу ввечері. Приготуйте , будь ласка , нічліг для всієї нашої команди , - Ваші друзі "

Звістка про прибуття гостей була зустрінута з захопленням. Утруднення виникло тільки з їх розміщенням на нічліг. Потрібно було знати число очікуваних гостей , але саме про це в листі нічого не було сказано. Тим паче з'ясувати все ж вдалося. Скільки гостей мало приїхати ?

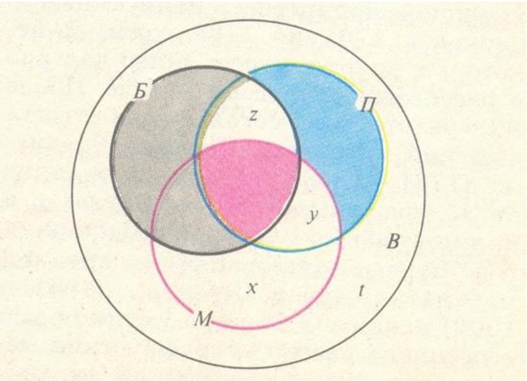


Рис. 1.

<u>Рішення .</u> Розглянемо рис.1.

У ньому велике коло зображує безліч всіх гостей. Кола Б , П , М зображують відповідно безлічі , стрибунів метальників . Неважко зрозуміти і сенс окремих частин цих кіл. Так , наприклад , загальна частина кіл Б і П зображує безліч тих . Хлопців , які являються і бігунами , і стрибунами . Серед гостей були ще й волейболісти , але (як випливає з листа) жоден з волейболістів не був ні бігуном , ні стрибуном , ні метальником . Значить , вся область поза кіл Б , П , М припадає на частку волейболістів . Тому ця область позначена буквою В. Відомо , що всі бігуни були стрибунами . Це означає , що вся область Б повинна знаходитися всередині П. Щоб ця умова була виконана , треба заштрихувати ту частину Б , яка виходить за межі П , - відзначаючи цим , що заштрихована частина є порожнім безліччю . Відомо також , що всі стрибуни є або метальниками , або бігунами . Значить , коло П цілком повинен знаходитися всередині області , що складається з Б і М. Тому ту частину П , яка виходить за межі цієї області , слід заштрихувати .

Відомо ще , що серед тих метальників , які були ще й стрибунами , немає бігунів. Значить , із загальної частини кіл М і П треба виключити ту частинку , яка знаходиться всередині Б , - її теж треба заштрихувати .

У не заштриховані осередках запишемо літери x , y , z , t , які будуть позначати число хлопців, що займаються відповідними видами спорту. Число метальників в два рази менше числа стрибунів . Значить , 2 (x + y) = y + z . Число метальників на два менше числа бігунів. Значить , . Бігуни становлять 1 / 3 всієї команди. Тому 3z = x + y + z + t . Число волейболістів в два рази більше числа хлопців , які одночасно є стрибунами і метальниками . Значить , t = 2y . Вийшла система чотирьох рівнянь з чотирма невідомими. Вирішивши цю систему , знайдемо : x = 2 , y = 6 , z = 10 , t = 12 . Отже , кількість гостей дорівнює 2 +6 +10 +12 = 30

Відповідь: на змагання мала приїхати команда з 30 осіб.

Задача 2. При школі була присадибну ділянку з теплицею . У суботу група хлопців працювала на цій ділянці . Вони ремонтували теплицю і поливали огірки , помідори і капусту. По закінченні роботи потрібні були відомості про число працювавших, але думки хлопців розійшлися і дізнатися нічого не вдалося.

Було встановлено тільки наступне . Хлопці , ремонтували теплицю , не займалися поливанням , а хлопці , поливаливші овочі , не брали участь у ремонті теплиці. Ніхто з хлопців не поливав одночасно огірки та капусту. Деякі хлопці поливали помідори і огірки , деякі поливали помідори і капусту , але не було таких хлопців , які поливали б тільки помідори. Огірки поливало 7 осіб , а помідори - 4. Число хлопців , які ремонтували теплицю , було на 2 менше числа хлопців , поливали тільки огірки. Подвоєне число хлопців , поливавших тільки капусту , було на 1 більше потроєного числа тих хлопців , які поливали тільки огірки.

Скільки ж хлопців було в суботу на присадибній ділянці?

Рішення . Намалюємо відповідну діаграму Ейлера- Венна (рис.3).

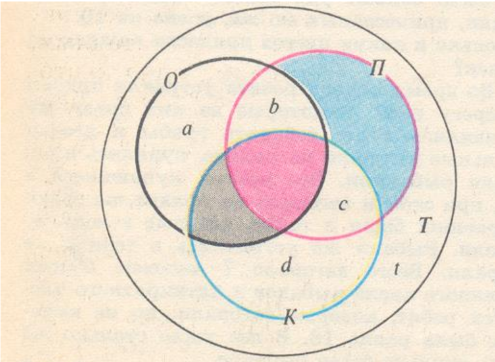


Рис. 3.

Кола О, П , К зображують безлічі хлопців ,які поливали відповідно огірки , помідори і капусту. Теплицю ремонтували ті і тільки ті хлопці , що не були зайняті на поливанні овочів. Значить , область , розташована поза кіл О, П , К, зображує безліч хлопців , які ремонтували теплицю. Ця область позначена буквою Т.

Ніхто з хлопців не поливав одночасно огірки та капусту. Тому загальну частину кіл О і К треба заштрихувати . Ніхто з хлопців не поливав тільки помідори. Значить , ту частину круга П , яка знаходитися поза кіл О і К, теж потрібно заштрихувати . Чисельні значення незаштриховані осередків позначимо літерами a , b , c , d , t . Буква a , наприклад , означає число хлопців , поливали тільки огірки ; буква b позначає число хлопців , поливали і огірки, і помідори. Сенс інших букв ясний з малюнка. Тепер, за відомим данним , можна записати рівняння :

$$\begin{cases} a+b=74; \\ b+c=4; \\ a=t+2; \\ 2d=3a+1. \end{cases}$$

Вийшла невизначена система чотирьох рівнянь з п'ятьма невідомими. Щоб вирішити цю систему, приймемо a за параметр, якому ми самі можемо приписати якесь конкретне значення. Тоді залишиться чотири невідомих. Вирішивши систему відносно цих невідомих, ми, отримаємо наступні співвідношення: *b = 7-a, c = a-3, d = (3a+1) /2, t = a-2*. Тепер, здавалося б, надавши параметру a якесь довільне значення, ми зможемо обчислити і відповідні значення невідомих b, c, d, t. А так як вибір значення параметра a начебто зовсім довільний, то ми отримаємо нескінченну безліч рішень. Насправді ж це не так. Справа в тому, що невідомі повинні бути цілими невід'ємними числами. А це означає, що повинні виконуватися такі додаткові умови: 7-a $\geq$ 0, a-3$\geq 0, 3a+1 \geq 0, a-2 \geq 0, \frac{3a+1}{2}$ – ціле число. Остання умова означає, що 3a +1 має бути парним числом, а це можливо тільки тоді, коли a - непарне число.

Вирішивши систему наведених вище нерівностей, отримаємо 3 ≤ a ≤ 7; a - непарне число. Значить, для параметра a вийшло три значення: 3, 5, 7. Але при a = 3 отримаємо c = 0, а при a = 7 отримаємо b = 0, що неможливо, так як b і c позначають число хлопців, поливали крім помідор ще капусту чи огірки, а за умовою ці множини не можуть бути порожніми. Отже, для параметра a залишається одне-єдине значення a = 5. Решта невідомі візьмуть тоді такі значення: b = 2, c = 2, d = 8, t = 3. Таким чином, загальне число хлопців, які працювали на ділянці, дорівнює 5 +2 +2 +8 +3 = 20

Відповідь: на ділянці в суботу працювало 20 хлопців.

Графи

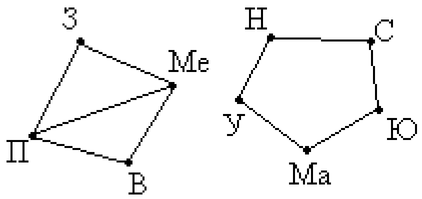
Графи - чудові математичні об'єкти, з їх допомогою можна вирішувати дуже багато різних, зовні не схожих один на одного завдань. У математиці існує цілий розділ - теорія графів, який вивчає графи, їх властивості та застосування. Ми ж обговоримо тільки самі основні поняття, властивості графів і деякі способи вирішення завдань.

Поняття графа

Розглянемо два завдання.

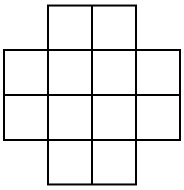
Завдання 1. Між дев'ятьма планетами сонячної системи встановлено космічне повідомлення. Рейсові ракети літають за наступними маршрутами: Земля - Меркурій; Плутон - Венера; Земля - Плутон; Плутон - Меркурій; Меркурій - Відні; Уран - Нептун; Нептун - Сатурн; Сатурн - Юпітер; Юпітер - Марс і Марс - Уран. Чи можна долетіти на рейсових ракетах з Землі до Марса?

Рішення: Намалюємо схему умови: планети зобразимо точками, а маршрути ракет - лініями.



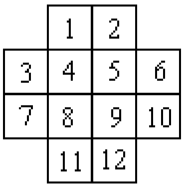
Тепер відразу видно, що долетіти з Землі до Марса не можна.

Завдання 2. Дошка має форму подвійного хреста, який виходить, якщо з квадрата 4х4 прибрати кутові клітини.

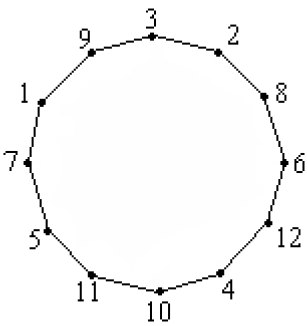


Чи можна обійти її ходом шахового коня і повернутися на вихідну клітку, побувавши на всіх клітинах рівно по одному разу?

Рішення: Занумеруем послідовно клітини дошки:



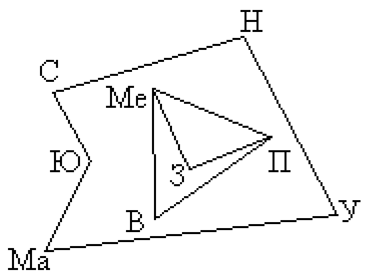
А тепер за допомогою малюнка покажемо, що такий обхід таблиці, як зазначено в умові, можливий:



Ми розглянули дві несхожі завдання. Однак вирішення цих двох завдань об'єднує спільна ідея - графічне представлення рішення. При цьому і картинки, намальовані для кожного завдання, виявилися схожими: кожна картинка - це кілька точок, деякі з яких з'єднані лініями.

Такі картинки і називаються графами. Точки при цьому називаються вершинами, а лінії - ребрами графа. Зауважимо, що не кожна картинка такого виду буде називатися графом. Наприклад. якщо вас попросять намалювати в зошиті п'ятикутник, то такий малюнок графом не буде. Будемо називати що малюнок такого виду, як у попередніх завданнях, графом, якщо є якась конкретна задача для якої такий малюнок побудований.

Інше зауваження стосується виду графа. Спробуйте перевірити, що граф для однієї і тієї ж задачі можна намалювати різними способами; і навпаки для різних завдань можна намалювати однакові з вигляду графи. Тут важливо лише те, які вершини з'єднані один з одним, а які - ні. Наприклад, граф для задачі 1 можна намалювати по-іншому:



Такі однакові, але по-різному намальовані графи, називаються ізоморфними.

Ступені вершин і підрахунок числа ребер графа

Запишемо ще одне визначення : Ступенем вершини графа називається кількість виходять з неї ребер. У зв'язку з цим , вершина , що має парну ступінь , називається парною вершиною , відповідно, вершина , що має непарну ступінь , називається непарної вершиною.

З поняттям ступеня вершини пов'язана одна з основних теорем теорії графів - теорема про чесність числа непарних вершин. Доведемо її ми трохи пізніше , а спочатку для ілюстрації розглянемо завдання .

Завдання 3 . У місті Маленькому 15 телефонів. Чи можна їх з'єднати проводами так , щоб кожен телефон був з'єднаний рівно з п'ятьма іншими?

Рішення: Припустимо , що таке з'єднання телефонів можливо. Тоді уявімо собі граф , в якому вершини позначають телефони , а ребра - дроти , їх з'єднують . Підрахуємо , скільки всього вийде проводів . До кожного телефону підключено рівно 5 проводів , тобто ступінь кожної вершини нашого графа - 5. Щоб знайти число проводів , треба підсумувати ступеня всіх вершин графа і отриманий результат розділити на 2 (тому кожен дріт має два кінця , то при підсумовуванні ступенів кожен дріт буде взято 2 рази). Але тоді кількість проводів вийде різним. Але це число не є цілим . Значить наше припущення про те , що можна з'єднати кожен телефон рівно з п'ятьма іншими , виявилося невірним.

Відповідь . З'єднати телефони таким чином неможливо.

Теорема : Будь граф містить парне число непарних вершин.

Доказ: Кількість ребер графа дорівнює половині суми ступенів його вершин . Так як кількість ребер має бути цілим числом , то сума ступенів вершин повинна бути парною . А це можливо тільки в тому випадку , якщо граф містить парне число непарних вершин.

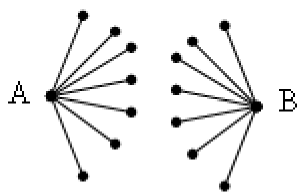
Зв'язність графа

Є ще одне важливе поняття, що відноситься до графів - поняття зв'язності.

Граф називається зв'язковим, якщо з будь-які дві його вершини можна з'єднати шляхом, тобто безперервної послідовністю ребер. Існує цілий ряд завдань, вирішення яких заснована на понятті зв'язності графа.

Задача 4. У країні Сімка 15 міст, кожне з міст з'єднаний дорогами не менше, ніж з сімома іншими. Доведіть, що з кожного міста модно дістатися в будь-який інший.

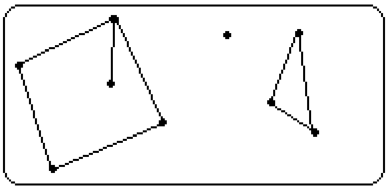
Доказ: Розглянемо два довільних А і В міста і припустимо, що між ними немає шляху. Кожен з них з'єднаний дорогами не менше, ніж з сімома іншими, причому немає такого міста, який був би з'єднаний з обома розглянутими містами (в іншому випадку існував би шлях з А в В). Намалюємо частина графа, відповідну цим містах:



Тепер явно видно, що ми отримали не менше різних 16 міст, що суперечить умові завдання. Значить твердження доведено від супротивного.

Якщо взяти до уваги попереднє визначення, то твердження задачі можна переформулювати і по-іншому: "Довести, що граф доріг країни Сімка зв'язний."

Тепер ви знаєте, як виглядає зв'язний граф. Незв'язний граф має вигляд кількох "шматків", кожен з яких - небудь окрема вершина без ребер, або зв'язний граф. Приклад незв'язного графа ви бачите на малюнку:



Кожен такий окремий шматок називається компонентою зв'язності графа. Кожна компонента зв'язності являє собою зв'язний граф і для неї виконуються всі твердження, які ми довели для зв'язкових графів. Розглянемо приклад завдання, в якій використовується компонента зв'язності:

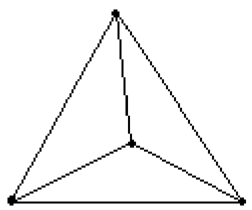
Задача 5. У тридев'ятому царстві тільки один вид транспорту - килим-літак. Зі столиці виходить 21 ковролін, з міста Далекий - одна, а з усіх інших міст, - по 20. Доведіть, що зі столиці можна долетіти в місто Далекий.

Доказ: Зрозуміло, що якщо намалювати граф ковролін Царства, то він може бути незв'язним. Розглянемо компоненту зв'язності, яка включає в себе столицю Царства. Зі столиці виходить 21 ковролін, а з будь-яких інших міст, крім міста Далекий - по 20, тому, щоб виконувався закон про парному числі непарних вершин необхідно, щоб і місто Далекий входив в цю ж саму компоненту зв'язності. А так як компонента зв'язності - зв'язний граф, то зі столиці існує шлях по ковроліну до міста Далекий, що й потрібно було довести.

Графи Ейлера

Ви напевно стикалися з завданнями, в яких потрібно намалювати будь-яку фігуру не відриваючи олівець від паперу і проводячи кожну лінію тільки один раз. Виявляється, що таке завдання не завжди можна залагодити, тобто існують фігури, які зазначеним способом намалювати не можна. Питання розв'язності таких задач також входить в теорію графів. Вперше його досліджував в 1736 році великий німецький математик Леонард Ейлер, вирішуючи завдання про Кенигсбергских мостах. Тому графи, які можна намалювати зазначеним способом, називаються ейлерова графами.

Задача 6. Чи можна намалювати зображений на малюнку граф не відриваючи олівець від паперу і проводячи кожне ребро рівно один раз?



Рішення. Якщо ми будемо малювати граф так, як сказано в умові, то в кожну вершину, крім початкової і кінцевої, ми увійдемо стільки ж разів, скільки вийдемо з неї. Тобто всі вершини графа, окрім двох повинні бути парними. У нашому ж графі є три непарні вершини, тому його не можна намалювати зазначеним в умові способом.

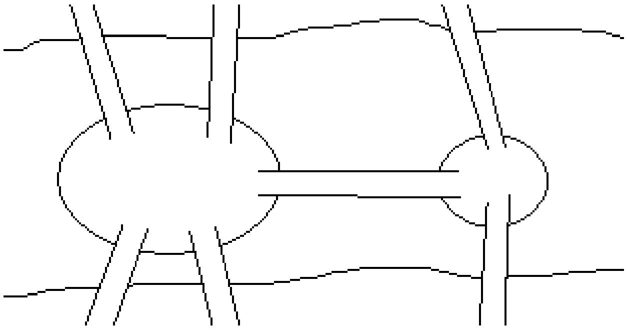
Зараз ми довели теорему про ейлерова графах:

Теорема: Ейлеров граф має мати не більше двох непарних вершин.

І на закінчення - завдання про Кенигсбергских мостах.

Задача 7. На малюнку зображена схема мостів міста Кенігсберга.

Чи можна здійснити прогулянку так, щоб пройти по кожному мосту рівно 1 раз?



Завдання до теми "Графи"

Поняття графа.

1. На квадратній дошці 3x3 розставлені 4 коня так, як показано на рис.1. Чи можна зробивши кілька ходів кіньми, переставити їх в положення, показане на рис.2?

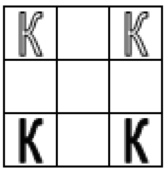


Рис. 1

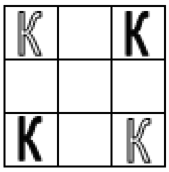
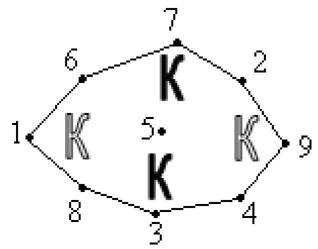


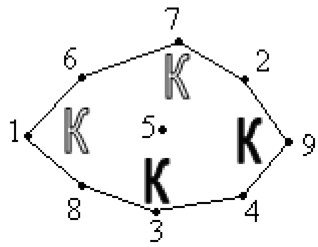
Рис.2

Рішення. Занумеруем клітини дошки, як показано на малюнку:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Кожній клітці поставимо у відповідність точку на площині і, якщо з однієї клітини можна потрапити в іншу ходом шахового коня, то відповідні точки з'єднаємо лінією. Вихідна і необхідна розстановки коней показані на малюнках:





При будь-якій послідовності ходів кіньми порядок їх проходження, очевидно, змінитися не може. Тому переставити коней потрібним чином неможливо.

2. У країні Цифра є 9 міст з назвами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Мандрівник виявив, що два міста з'єднані авіалінією в тому і тільки в тому випадку, якщо двозначне число, утворене назвами міст, ділиться на 3. Чи можна долетіти по повітрю з міста 1 в місто 9?

Рішення. Поставивши у відповідність кожному місту точку і з'єднавши точки лінією, якщо сума цифр ділиться на 3, отримаємо граф, в якому цифри 3, 5, 9 пов'язані між собою, але не пов'язані з іншими. Значить долетіти з міста 1 в місто 9 можна.

Ступені вершин і підрахунок числа ребер.

3 . У державі 100 міст до з кожного міста виходить 4 дороги. Скільки всього доріг в державі.

Рішення . Підрахуємо загальну кількість виходять міст доріг - 100. 4 = 400. Однак при такому підрахунку кожна дорога порахована 2 рази - вона виходить з одного міста і входить в інший. Значить всього доріг в два рази менше , тобто 200.

4 . У класі 30 осіб. Чи може бути так , що 9 осіб мають по 3 одного, 11 - по 4 друга , а 10 - по 5 друзів?

Відповідь . Немає (теорема про парність числа непарних вершин) .

5 . У короля 19 васалів. Чи може виявитися так , що у кожного васала 1 , 5 або 9 сусідів?

Відповідь . Ні, не може.

6 . Чи може в державі, в якій з кожного міста виходить рівно 3 дороги , бути рівно 100 доріг ?

Рішення . Підрахуємо число міст. Число доріг дорівнює числу міст x , помноженому на 3 (число виходять з кожного міста доріг) і розділеному на 2 (див. завдання 3). Тоді 100 = 3x / 2 => 3x = 200 , чого не може бути при натуральному x . Значить 100 доріг в такій державі бути не може.

7 . Доведіть , що число людей, що жили будь-коли на Землі і зробили непарне число рукостискань , парне.

Доказ безпосередньо випливає з теореми про парність числа непарних вершин графа.

Зв'язність

8. У країні з кожного міста виходить 100 доріг і з кожного міста можна дістатися до будь-якого іншого. Одну дорогу закрили на ремонт. Доведіть, що і тепер з будь-якого міста можна дістатися до будь-якого іншого.

Доказ. Розглянемо компоненту зв'язності, до якої входить один з міст, дорогу між якими закрили. По теоремі про парність числа непарних вершин у неї входить і друге місто. А значить і раніше можна знайти маршрут і дістатися з одного з цих міст в іншій.

Графи Ейлера

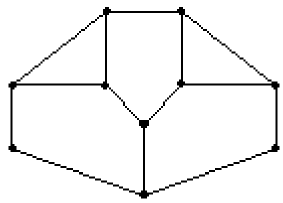
9. Є група островів, з'єднаних мостами так, що від кожного острова можна дістатися до будь-якого іншого. Турист обійшов всі острови, пройшовши по кожному мосту рівно 1 раз. На острові триразово він побував тричі. Скільки мостів веде з триразово, якщо турист

а) ні з нього почав і не на ньому закінчив?

б) з нього почав, але не на ньому закінчив?

в) з нього почав і на ньому закінчив?

10. На малюнку зображений парк, розділений на кілька частин парканами. Чи можна прогулятися по парку і його околицях так, щоб перелізти через кожен паркан рівно 1 раз?



Література

1. У світі математики, 2010,№ 16-с.48.
2. У світі математики, 1999,№ 5-с.23.
3. У світі математики, 1998,№ 14-с.33.
4. У світі математики, 1997,№ 3-с.33.
5. У світі математики, 1996,№ 2-с.43.
6. Квант, 1991,№ 12-с..