

МІНІСТЕРСТВО ОСВІТИ І НАУКИ УКРАЇНИ

ДЕПАРТАМЕНТ ОСВІТИ, НАУКИ ТА МОЛОДІ МИКОЛАЇВСЬКОЇ
ОБЛДЕРЖАДМІНІСТРАЦІЇ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ЦЕНТР
НАУКОВО-ТЕХНІЧНОЇ ТВОРЧОСТІ УЧНІВСЬКОЇ МОЛОДІ

ПОГОДЖЕНО

Протокол засідання науково-методичної ради Миколаївського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти

19.01.2016 № 4

Голова НМР *В. І. Шерер*



ЗАТВЕРДЖЕНО

Наказ департаменту освіти, науки та молоді Миколаївської облдержадміністрації

вд 30.01.2016 № 293

Директор *М. Б. Великовськ*



Навчальна програма з позашкільної освіти науково-технічного напрямку

«Математика: позашкільний компонент»
(1-2 рік навчання)»





Програму підготував:

Гозян Наталія Іванівна, вчитель математики, керівник гуртка "Математика. Позашкільний компонент" Миколаївського обласного центру науково-технічної творчості учнівської молоді

Рецензенти:

Рогожинська Еліна Костянтинівна методист лабораторії методики природничо-математичних дисциплін Миколаївського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти.

Шуляр Василь Іванович в.о. директора Миколаївського обласного інституту післядипломної педагогічної освіти кандидат педагогічних наук

Курікша Оксана Вікторівна в.о. доцента кафедри прикладної та вищої математики Чорноморського державного університету ім. Петра Могили, кандидат фізико-математичних наук.

Відповідальні за випуск:

Дремлюга Лариса Георгіївна - методист вищої категорії по організації роботи Миколаївського територіального відділення Малої академії наук з науково-технічного напрямку

Грігораш Катерина Олексіївна – заступник директора з навчально-виховної роботи Миколаївського обласного центру науково-технічної творчості учнівської молоді, методист вищої категорії



Зміст програми

II. НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН (1 рік навчання)----- 8

III. ЗМІСТ ПРОГРАМИ ----- 9

1. Презентація загальнодержавного науково-громадського проекту Мала академія наук України. ----- 9



Розділ 1. АЛГЕБРА. ----- 9

- 1.1. Раціональні вирази. ----- 9
- 1.2. Функціональні залежності. ----- 9
- 1.3. Квадратична функція. ----- 9
- 1.4. Поняття модуля та його застосування. ----- 10
- 1.5. Раціональні рівняння. ----- 10
- 1.6. Раціональні нерівності. ----- 10



Розділ 2. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА. ----- 10

- 2.1. Послідовності. ----- 10
- 2.2. Елементи прикладної математики. ----- 11



Розділ 3. ГЕОМЕТРІЯ. ----- 11

- 3.1. Взаємне розташування прямих на площині. ----- 11
- 3.2. Геометричні фігури та їх властивості. ----- 11
- 3.3. Розв'язування трикутників. ----- 12
- 3.4. Системи координат. Геометричні перетворення. ----- 12



Розділ 4. МЕТОДИ ТА ФОРМИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ З МАТЕМАТИКИ В СИСТЕМІ МАЛОЇ АКАДЕМІЇ НАУК ----- 12

- 4.1. Практикум з задач вхідних тестувань до МАН (обласний рівень). ----- 12
- 4.2. Основи наукових досліджень. ----- 12

IV. ПОУРОЧНЕ ПЛАНУВАННЯ РОБОТИ ГУРТКА (1 рік навчання). ----- 13

VI. НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН (2 рік навчання)----- 18

VII. ЗМІСТ ПРОГРАМИ. ----- 19

- 1. Методи та форми наукових досліджень з математики в системі Малої академії наук. Презентація загальнодержавного науково-громадського проекту Мала академія наук України. (3 год.)----- 19
- 2. Математична логіка (21 годин).----- 19
- 3. Комбінаторика (27 годин).----- 19
- 4. Цілі числа та теорія многочленів. Подільність (24 годин).----- 19
- 5. Логічні задачі (15 годин).----- 19
- 6. Дійсні числа (15 годин).----- 20



7. Планіметрія (39години).-----	20
8. Стереометрія (39години).-----	20
9. Методи оптимізації (21 годин).-----	20
10. Елементи лінійної алгебри. (42 год.)-----	20
11. Практикум з задач конкурсів-захистів МАН (обласний та республіканський рівень) (39 год.)-----	21
12. Основи наукових досліджень (18 год.)-----	21
13. Конкурси, екскурсії, виставки, тематичні заходи (18год.)-----	21
14. Підсумкове заняття (3 год)-----	21
VIII. ПОУРОЧНЕ ПЛАНУВАННЯ РОБОТИ ГУРТКА (2 рік навчання).-----	22
IX. ПРОГНОЗОВАНИЙ РЕЗУЛЬТАТ-----	28
X. ТЕМАТИКА НАУКОВО-ДОСЛІДНИХ РОБІТ УЧНІВ ВІДДІЛЕННЯ МАТЕМАТИКИ МАН-----	29
XI. СЛОВНИК МАТЕМАТИЧНИХ ТЕРМІНІВ-----	35
XII. ЛІТЕРАТУРА-----	30
XIII. КАТАЛОГ ОСВІТНІХ РЕСУРСІВ З МАТЕМАТИКИ-----	31
XIV. Методична розробка до практичної частини: ЗАДАЧІ – «РОДЗИНКИ» ТА ЗАДАЧІ – «ФОРТЕЦІ»-----	37
Текстові логічні задачі-----	37
Задачі для наймолодших школярів-----	42
Логічні задачі та логічні головоломки-----	43
Таємниці натуральних чисел. Подільність суми, різниці, добутку.-----	44
Комбінаторика-----	46
Діаграми Ейлера-Венна-----	48
Графи-----	51



I. ПОЯСНЮВАЛЬНА ЗАПИСКА

На сьогодні до числа найбільш актуальних питань освіти є поліпшення якості освіти, зокрема науково-технічної, є необхідною умовою формування інноваційного суспільства та підвищення конкурентоспроможності економіки.

В умовах становлення і розвитку високотехнологічного інформаційного суспільства в Україні виникає необхідність підвищення якості та пріоритетності позашкільної науково-технічної освіти.

Отримання якісної математичної освіти є однією з найважливіших гарантій реалізації громадянами їх інтелектуального потенціалу, вирішальним фактором утвердження соціальної справедливості та політичної стабільності.

Математика – це потужний фактор інтелектуального розвитку дитини. Саме точні науки сприяють формуванню пізнавальних та творчих здібностей дитини. Одним із засобів зацікавлення учнів математикою є добре продумана позакласна робота. Вона є однією з форм організації пізнавальної діяльності учнів різного віку, але разом з тим вимагає конкретних знань, ерудованості, широкої обізнаності з математичних дисциплін.

Програма призначена для організації позакласної та позашкільної роботи з математики і покликана надати допомогу учням бажаючим вступити до Малої академії наук по секціям «математика», «прикладна математика», «інформатика», «економіка», «техніко-технологічна», «фізика», «астрономія», які вибирають базову дисципліну математику.

Підбір тем заняття відбувається з урахуванням шкільної підготовки учнів та шкільної програми факультативних занять. Проведення занять відбувається у формі живого, безпосереднього спілкування учнів та викладача, з урахуванням індивідуального підходу до гуртківців. Під час занять використовуються комп'ютерні технології.

Основу програми складають розбір та вивчення розділів математики, які є базовими до програми загальноосвітньої школи на рівні 8-11 класів та передбачає поглиблене вивчення математики, що є основою підготовки до вступу в Малу академію наук України та підготовки до контрольної роботи з математики на конкурсній захисті робіт слухачів та дійсних членів Малої академії наук України.

Вивчення додаткових розділів математики розширює математичний кругозір та закладає певні навички дослідницької діяльності, що дозволяє розв'язувати задачі підвищеної складності, більш свідомо підходити до вивчення шкільного курсу математики.



Метою програми є формування компетентностей особистості в процесі математичної позашкільної освіти, а саме формування в учнів уявлень про математику як форму опису та метод пізнання дійсності, розуміння ролі математики в сучасному житті, закріплення базових математичних понять на рівні практичного використання, та успішного проходження вхідного тестування з базової дисципліни „математика” до Миколаївського територіального відділення Малої академії наук, та успішної участі в обласному конкурсі-захисті робіт слухачів та дійсних членів Миколаївського територіального відділення Малої академії наук України;

Завдання навчальної програми: прищеплювати учням інтерес до математики; поглиблювати і розширювати знання учнів з математики; розвивати математичний кругозір, логічне й абстрактне мислення, дослідницькі вміння та навички школярів; сприяти інтелектуально-практичній дослідницькій діяльності гуртківців.

Основні завдання полягають у формуванні таких компетентностей:

- **пізнавальної:** озброєння учнів певним обсягом математичних знань і вмінь, необхідних для сприйняття та усвідомлення навколишньої дійсності, підвищення загальної математичної культури; зацікавлення дітей вивченням історії математики, формування розумових операцій (аналізу, синтезу, порівняння, узагальнення, класифікації); розвиток просторового мислення: геометричне моделювання; інтелектуальний розвиток гуртківців, розвиток їхнього логічного мислення; опанування гуртківцями системи математичних знань та вмінь, що є базою для реалізації зазначених цілей: підвищення рівня знань з базової дисципліни «математика»; ознайомлення з принципами та ідеями загальнодержавного науково-громадського проекту Мала академія наук України;

- **практичної:** формування умінь і навичок складання математичної моделі задачі, застосування математичних властивостей під час розв'язування задач, узагальнення і систематизування прийомів розв'язування математичних задач, розвивати мову, спостережливість, розумову активність, вміння висловлювати і обґрунтовувати свої судження; розвивати слухову і зорову увагу, пам'ять, логічне мислення; розвивати конструктивні і творчі здібності, фантазію, творчу уяву;

- **творчої** :гармонійний розвиток особистості, розвиток творчої активності, логічного мислення та математичного мовлення, просторової уяви;



Гурток: «Математика. Позашкільний компонент»

- *соціальної*: формування життєвої самостійності, освіченої особистості, підготовленої до життя та активної трудової діяльності, розвиток загальнолюдських позитивних якостей, виховувати інтерес до придбання нових знань; розвивати самостійність, вміння планувати свою роботу; виховувати дружні стосунки між дітьми, звичку займатися спільно.

Завдяки використанню програми розширюється можливість доступу слухачів Малої академії наук до навчальних ресурсів, встановлюється швидкий обмін навчальною інформацією між викладачем, науковим керівникам і учням та контроль (самоконтроль) за виконанням навчальної програми.

Програмою передбачено читання лекцій та проведення практичних занять.

Робота гуртка передбачає наступну *організаційну роботу*: запис бажаючих відвідувати математичний гурток; складання плану роботи гуртка на навчальний рік; загальні збори членів гуртка; підсумки роботи гуртка за рік; огляд наочних матеріалів; заключне слово керівника.

Навчальну програму складено на підставі про методичні рекомендації щодо з математики для до профільної підготовки та профільного навчання.



II. НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН (1 рік навчання)

№ п/п	Тема	Кількість годин		
		Всього	На теоретичні заняття	На практичні заняття
1	Презентація загальнодержавного науково-громадського проекту Мала академія наук України.	3	3	-
2	Раціональні вирази.	21	6	15
3	Функціональні залежності.	30	12	18
4	Квадратична функція	15	6	9
5	Поняття модуля та його застосування	15	6	9
6	Раціональні рівняння.	30	12	18
7	Раціональні нерівності.	30	12	18
8	Послідовності	21	9	12
9	Елементи прикладної математики	39	18	21
10	Взаємне розташування прямих на площині.	9	3	6
11	Геометричні фігури та їх властивості.	21	6	15
12	Розв'язування трикутників.	21	6	15
13	Системи координат. Геометричні перетворення.	21	6	15
14	Практикум з задач вхідних тестувань до МАН (обласний та республіканський рівень)	27	6	21
15	Основи наукових досліджень	21	15	6
	Всього	324	126	198



III. ЗМІСТ ПРОГРАМИ

1. Презентація загальнодержавного науково-громадського проекту Мала академія наук України.

(3 год.)

Історія Малої академії наук України. Структура Малої академії наук України, її цілі та задачі. Умови вступу до МАН.



Розділ 1. **АЛГЕБРА.**

1.1. Раціональні вирази.

(21 год.)

Дробові вирази. Допустимі значення змінних. Тотожні перетворення раціональних виразів. Властивості степені з цілим показником. Обернена пропорційність.

Приклади розв'язання задач. Використання евристичних прийомів для розв'язання задач підвищеної складності. Обласна математична олімпіада. Розв'язання задач з даної тематики (вибірка задач).

1.2. Функціональні залежності.

(30 год.)

Поняття функції. Область визначення, область значення. Властивості функції: проміжки знакосталості, зростання та спадання функції. Графік функції. Способи завдання функцій. Перетворення графіків функцій за допомогою елементарних перетворень. Різниця між поняттями функції та раціонального виразу.

Приклади розв'язання задач. Побудова графіків степеневих функцій та функції оберненої пропорційності за допомогою елементарних перетворень. Розв'язання тестів вхідного тестування (1 рівень) з даної тематики.

1.3. Квадратична функція.

(15 год.)

Властивості квадратичної функції. Графік квадратичної функції. Умови розташування коренів квадратного тричлена у загальному випадку.

Побудова графіків квадратичної функцій за допомогою елементарних перетворень.



1.4. Поняття модуля та його застосування.

(15 год.)

Властивості модуля. Геометричний зміст модуля. Побудова графіків функцій, як містять модуль під знаком аргументу. Раціональні вирази під знаком модуля.

1.5. Раціональні рівняння.

(30 год.)

Цілі та дробові раціональні рівняння. Способи розв'язування дробових раціональних рівнянь. Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних. Розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь та рівнянь, які зводяться до квадратних. Розв'язання раціональних рівнянь з параметром та знаком модуля. Задачі підвищеної складності. Розв'язання тестів вхідного тестування (1 рівень) з даної тематики. Обласна математична олімпіада. Розв'язання задач з даної тематики (вибірка задач).

1.6. Раціональні нерівності.

(30 год.)

Цілі та дробові раціональні нерівності. Способи розв'язування дробових раціональних нерівностей. Розв'язання степеневих нерівностей з однією змінною. Розв'язування нерівностей методом інтервалів. Розв'язування нерівностей, які зводяться до квадратних. Розв'язання раціональних нерівностей з параметром та знаком модуля. Задачі підвищеної складності. Розв'язання тестів вхідного тестування (1-2 рівень) з даної тематики. Обласна математична олімпіада. Розв'язання задач з даної тематики (вибірка задач).



Розділ 2. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА.

2.1. Послідовності.

(21 год.)

Числові послідовності. Арифметична прогресія, її властивості. Формула n -го члена арифметичної прогресії. Сума перших n членів арифметичної прогресії.

Геометрична прогресія, її властивості. Формула n -го члена геометричної



прогресії. Сума перших n членів геометричної прогресії.

Нескінченна геометрична прогресія та її сума.

Розв'язування вправ і задач на прогресії, в тому числі прикладного змісту.

2.2. Елементи прикладної математики.

(39 год.)

Математична логіка: Найпростіші булеві функції. Нормальна форма булевої функції. Дешифрація запису арифметичної дії з цілими числами. Сюжетні задачі з відомою наперед кількістю персонажів (подій).

Комбінаторика: Впорядкування чисел. Перестановки, розташування і комбінації: обчислення кількості й перебір. Реалізація невідомої наперед кількості вкладених циклів однією групою операторів. Період підстановки. Рекурентні співвідношення. Найдовша спільна підпоследовність двох последовностей. Математичне моделювання.

Відсоткові розрахунки. Формула складних відсотків. Випадкова подія. Ймовірність випадкової події.

Статистичні дані. Способи подання даних. Частота. Середнє значення.



Розділ 3. **ГЕОМЕТРІЯ.**

3.1. Взаємне розташування прямих на площині.

(9 год.)

Суміжні та вертикальні кути, їх властивості. Паралельні та перпендикулярні прямі, їх властивості. Перпендикуляр. Відстань від точки до прямої. Кут між двома прямими, що перетинаються.

Кути, утворені при перетині двох прямих січною. Ознаки паралельності прямих. Властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною.

3.2. Геометричні фігури та їх властивості.

(21 год.)

Чотирикутник, його елементи. Паралелограм та його властивості. Ознаки паралелограма. Прямокутник, ромб, квадрат та їх властивості. Трапеція. Вписані та описані чотирикутники. Вписані та центральні кути. Теорема Фалеса. Середня лінія трикутника, її властивості. Середня лінія трапеції, її властивості. Многокутник та його елементи.



Гурток: «Математика. Позашкільний компонент»

Опуклі й неопуклі многокутники. Сума кутів опуклого многокутника. Вписані й описані многокутники. Поняття площі многокутника. Основні властивості площ. Площа прямокутника, паралелограма, трикутника. Площа трапеції. Правильні многокутники. Формули радіусів вписаних і описаних кіл правильних многокутників. Побудова правильних многокутників.

Коло. Довжина кола. Довжина дуги кола. Площа круга та його частин.

3.3. Розв'язування трикутників.

(21 год.)

Синус, косинус, тангенс кутів від 0° до 180° . Тригонометричні тотожності. Теореми косинусів і синусів. Розв'язування трикутників. Прикладні задачі. Формули для знаходження площі трикутника.

3.4. Системи координат. Геометричні перетворення.

(21 год.)

Прямокутна система координат на площині. Координати середини відрізка. Відстань між двома точками із заданими координатами. Рівняння кола і прямої. Переміщення та його властивості.

Симетрія відносно точки і прямої, поворот, паралельне перенесення. Рівність фігур. Перетворення подібності та його властивості. Гомотетія. Подібність фігур. Площі подібних фігур.



Розділ 4. МЕТОДИ ТА ФОРМИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ З МАТЕМАТИКИ В СИСТЕМІ МАЛОЇ АКАДЕМІЇ НАУК

4.1. Практикум з задач вхідних тестувань до МАН (обласний рівень).

(27 год.)

Розв'язання задач вхідного тестування з математики (обласний рівень) 1999-2015 рік.

4.2. Основи наукових досліджень.


(21 год.)

Ознайомлення з основами наукових досліджень. Розгляд учнівських науково-дослідних робіт, представлених на обласних конкурсах-захистах

Критерії оцінки робіт МАН, правила оформлення конкурсної роботи. Джерела пошуку матеріалів для написання конкурсної роботи.



IV. ПОУРОЧНЕ ПЛАНУВАННЯ РОБОТИ ГУРТКА (1 рік навчання).

№	Тема, розділ програми. Зміст роботи (на кожне заняття)	Вид роботи	г о д и н и
1. Презентація загальнодержавного науково-громадського проекту Мала академія наук України. (3 год.)			
1.	Історія Малої академії наук України. Структура Малої академії наук України, її цілі та задачі. Умови вступу до МАН.	Теоретичне заняття (Т.З.)	3
 Розділ 1. АЛГЕБРА.			
1.1. Раціональні вирази. . (21 година).			
2.	Дробові вирази. Допустимі значення змінних. Тотожні перетворення раціональних виразів	(Т.З.)	3
3.	Приклади розв'язання задач.	(П.З.)	3
4.	Властивості степені з цілим показником. Обернена пропорційність.	(Т.З.)	3
5.	Приклади розв'язання задач.	(П.З.)	3
6.	Використання евристичних прийомів для розв'язання задач підвищеної складності.	(П.З.)	3
7.	Обласна математична олімпіада. Розв'язання задач з даної тематики (вибірка задач).	(П.З.)	3
8.	Розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(П.З.)	3
1.2. Функціональні залежності. (30 год.)			
9.	Поняття функції. Область визначення, область значення. Властивості функції: проміжки знакосталості, зростання та спадання функції.	(Т.З.)	3
10.	Графік функції. Приклади розв'язання задач	(П.З.)	3
11.	Способи завдання функцій. Різниця між поняттями функції та раціонального виразу.	(Т.З.)	3
12.	Приклади розв'язання задач	(П.З.)	3
13.	Перетворення графіків функцій за допомогою елементарних перетворень.	(П.З.)	3
14.	Приклади розв'язання задач	(Т.З.)	
15.	Побудова графіків степеневих функцій та функції оберненої	(Т.З.)	





Гурток: «Математика. Позашкільний компонент»

	пропорційності за допомогою елементарних перетворень.		
16.	Приклади розв'язання задач	(п.з.)	
17.	Розв'язання тестів вхідного тестування (1 рівень) з даної тематики.	(п.з.)	
18.	Розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	
1.3. Квадратична функція. (15 год.)			
19.	Властивості квадратичної функції.	(т.з.)	3
20.	Графік квадратичної функції..	(п.з.)	3
21.	Умови розташування коренів квадратного тричлена у загальному випадку	(п.з.)	3
22.	Побудова графіків квадратичної функцій за допомогою елементарних перетворень.	(т.з.)	3
23.	Розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	3
1.4. Поняття модуля та його застосування. (15 год.)			
24.	Властивості модуля. Геометричний зміст модуля.	(т.з.)	3
25.	Побудова графіків функцій, як містять модуль під знаком аргументу.	(т.з.)	3
26.	Приклади розв'язання задач	(п.з.)	3
27.	Раціональні вирази під знаком модуля.	(п.з.)	3
28.	Розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	3
1.5. Раціональні рівняння. (30 год.)			
29.	Цілі та дробові раціональні рівняння.	(т.з.)	
30.	Способи розв'язування дробових раціональних рівнянь.	(п.з.)	
31.	Розв'язування рівнянь, які зводяться до квадратних.	(п.з.)	
32.	Розв'язування задач за допомогою квадратних рівнянь та рівнянь, які зводяться до квадратних.	(т.з.)	
33.	Приклади розв'язання задач.	(п.з.)	
34.	Розв'язання раціональних рівнянь з параметром та знаком модуля.	(т.з.)	
35.	Розв'язання тестів вхідного тестування (1 рівень) з даної тематики.	(п.з.)	
36.	Задачі підвищеної складності.	(т.з.)	
37.	Обласна математична олімпіада. Розв'язання задач з даної тематики (вибірка задач).	(п.з.)	
38.	Приклади розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	3
1.6. Раціональні нерівності. (30 год.)			
39.	Цілі та дробові раціональні нерівності. Способи розв'язування дробових раціональних нерівностей.	(т.з.)	3
40.	Розв'язання степеневих нерівностей з однією змінною. Розв'язування нерівностей методом інтервалів.	(т.з.)	3
41.	Розв'язування нерівностей, які зводяться до квадратних.	(п.з.)	3
42.	Приклади розв'язання задач..	(п.з.)	
43.	Розв'язання раціональних нерівностей з параметром та знаком модуля.	(т.з.)	3
44.	Задачі підвищеної складності.	(п.з.)	3
45.	Приклади розв'язання задач.	(п.з.)	3



Гурток: «Математика. Позашкільний компонент»

46.	Розв'язання тестів вхідного тестування (1-2 рівень) з даної тематики.	(т.з.)	3
47.	Обласна математична олімпіада. Розв'язання задач з даної тематики (вибірка задач).	(п.з.)	3
48.	Приклади розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	3
 Розділ 2. ПРИКЛАДНА МАТЕМАТИКА.			
2.1. Послідовності. (21 год.)			
49.	Числові послідовності. Арифметична прогресія, її властивості.	(т.з.)	3
50.	Формула n-го члена арифметичної прогресії. Сума перших n членів арифметичної прогресії.	(т.з.)	3
51.	Геометрична прогресія, її властивості. Формула n-го члена геометричної прогресії. Сума перших n членів геометричної прогресії.	(т.з.)	3
52.	Приклади розв'язання задач.	(п.з.)	3
53.	Нескінченна геометрична прогресія та її сума.	(т.з.)	3
54.	Розв'язування вправ і задач на прогресії, в тому числі прикладного змісту.	(п.з.)	3
55.	Приклади розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	3
2.2. Елементи прикладної математики. (39 год.)			
56.	Елементи математичної логіки: Логічні операції. Найпростіші булеві функції.	(т.з.)	3
57.	Приклади розв'язання задач.	(п.з.)	3
58.	Комбінаторика: Впорядкування чисел.	(т.з.)	3
59.	Перестановки, розташування обчислення кількості й перебір.	(т.з.)	3
60.	Комбінації: обчислення кількості й перебір.	(п.з.)	3
61.	Приклади розв'язання задач.	(т.з.)	3
62.	Реалізація невідомої наперед кількості вкладених циклів однією групою операторів. Період підстановки. Рекурентні співвідношення.	(п.з.)	3
63.	Математичне моделювання.	(т.з.)	3
64.	Відсоткові розрахунки. Формула складних відсотків.	(п.з.)	3
65.	Приклади розв'язання задач.	(п.з.)	3
66.	Задачі підвищеної складності.	(п.з.)	3
67.	Статистичні дані. Способи подання даних. Частота. Середнє значення.	(т.з.)	3
68.	Приклади розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	3
 Розділ 3. ГЕОМЕТРИЯ.			
3.1. Взаємне розташування прямих на площині. (9 год.)			
69.	Суміжні та вертикальні кути, їх властивості. Паралельні та перпендикулярні прями, їх властивості. Перпендикуляр. Відстань від точки до прямої. Кут між двома прямими, що	(т.з.)	3



Гурток: «Математика. Позашкільний компонент»

	перетинаються.		
70.	Кути, утворені при перетині двох прямих січною. Ознаки паралельності прямих. Приклади розв'язання задач.	(п.з.)	3
71.	Властивості кутів, утворених при перетині паралельних прямих січною. Приклади розв'язання задач.	(п.з.)	3
3.2. Геометричні фігури та їх властивості. (21 год.)			
72.	Чотирикутник, його елементи. Паралелограм та його властивості. Ознаки паралелограма. Прямокутник, ромб, квадрат та їх властивості. Трапеція. Вписані та описані чотирикутники. Вписані та центральні кути.	(т.з.)	3
73.	Теорема Фалеса. Середня лінія трикутника, її властивості. Середня лінія трапеції, її властивості	(т.з.)	3
74.	Многокутник та його елементи. Опуклі й неопуклі многокутники. Сума кутів опуклого многокутника. Вписані й описані многокутники. Поняття площі многокутника.	(п.з.)	3
75.	Основні властивості площ. Площа прямокутника, паралелограма, трикутника. Площа трапеції. Правильні многокутники.	(п.з.)	3
76.	Формули радіусів вписаних і описаних кіл правильних многокутників. Побудова правильних многокутників.	(п.з.)	3
77.	Коло. Довжина кола. Довжина дуги кола. Площа круга та його частин.	(п.з.)	3
78.	Приклади розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	3
3.3. Розв'язування трикутників. (21 год.)			
79.	Синус, косинус, тангенс кутів від 0° до 180° .	(п.з.)	3
80.	Тригонометричні тотожності.	(т.з.)	3
81.	Теореми косинусів і синусів.	(т.з.)	3
82.	Розв'язування трикутників.	(п.з.)	3
83.	Формули для знаходження площі трикутника.	(п.з.)	3
84.	Прикладні задачі	(п.з.)	3
85.	Приклади розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	3
3.4. Системи координат. Геометричні перетворення. (21 год.)			
86.	Прямокутна система координат на площині. Координати середини відрізка. Відстань між двома точками із заданими координатами	(т.з.)	3
87.	Рівняння кола і прямої. Переміщення та його властивості.	(п.з.)	3
88.	Симетрія відносно точки і прямої, поворот, паралельне перенесення.	(т.з.)	3
89.	Рівність фігур. Перетворення подібності та його властивості.	(п.з.)	3
90.	Гомотетія. Приклади розв'язання задач.	(п.з.)	3
91.	Подібність фігур. Площі подібних фігур.	(п.з.)	3
92.	Приклади розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	3
<div style="text-align: center;">  </div>			
Розділ 4. МЕТОДИ ТА ФОРМИ НАУКОВИХ ДОСЛІДЖЕНЬ 3			



МАТЕМАТИКИ В СИСТЕМІ МАЛОЇ АКАДЕМІЇ НАУК			
4.1. Практикум з задач вхідних тестувань до МАН (обласний рівень). (27 год.)			
93.	Вхідне тестування. Принципи та цілі. Розв'язання задач вхідного тестування з математики (обласний рівень) 1999рік.	(т.з.)	3
94.	Розв'язання задач вхідного тестування з математики (обласний рівень) 2000 -2015рік.	(п.з.)	3
95.	Розв'язання задач вхідного тестування з математики (обласний рівень) 2003 - 2005 рік.	(п.з.)	3
96.	Розв'язання задач вхідного тестування з математики (обласний рівень) 2005 -2009 рік.	(п.з.)	3
97.	Розв'язання задач вхідного тестування з математики (обласний рівень) 2010-2015рік.	(п.з.)	3
98.	Конкурс-захист, контрольна робота з математики. Принципи та цілі.	(т.з.)	3
99.	Розв'язання задач контрольних робіт обласного та республіканських конкурсів-захисту робіт слухачів МАН 2013 рік.	(п.з.)	3
100.	Розв'язання задач контрольних робіт обласного та республіканських конкурсів-захисту робіт слухачів МАН 2014 рік.	(п.з.)	3
101.	Розв'язання задач контрольних робіт обласного та республіканських конкурсів-захисту робіт слухачів МАН 2015 рік.	(п.з.)	3
4.2. Основи наукових досліджень. (21 год.)			
102.	Ознайомлення з основами наукових досліджень	(т.з.)	3
103.	Критерії оцінки робіт МАН, правила оформлення конкурсної роботи.	(т.з.)	3
104.	Джерела пошуку матеріалів для написання конкурсної роботи.	(т.з.)	3
105.	Розгляд учнівських науково-дослідних робіт, представлених на обласних конкурсах-захистах 1999-2004 рік.	(т.з.)	3
106.	Розгляд учнівських науково-дослідних робіт, представлених на обласних конкурсах-захистах 2005-2010рік.	(т.з.)	3
107.	Розгляд учнівських науково-дослідних робіт, представлених на обласних конкурсах-захистах 2011-2015 рік.	(п.з.)	3
108.	Підсумкове заняття.	(п.з.)	3

*Практичне заняття - (п.з.) ** Теоретичне заняття - (т.з.)



VI. НАВЧАЛЬНО-ТЕМАТИЧНИЙ ПЛАН (2 рік навчання)

№ п/п	Тема	Кількість годин		
		Всього	На теоретичні заняття	На практичні заняття
1	Методи та форми наукових досліджень з математики в системі Малої академії наук. Презентація загальнодержавного науково-громадського проекту Мала академія наук України.	3	3	-
2	Математична логіка	21	9	12
3	Комбінаторика	27	9	18
4	Цілі числа та теорія многочленів. Подільність	24	9	15
5	Логічні задачі	15	6	9
6	Дійсні числа	15	6	9
7	Планіметрія	39	18	21
8	Стереометрія	39	18	21
9	Методи оптимізації	21	12	9
10	Елементи лінійної алгебри	42	21	21
14	Практикум з задач конкурсів-захистів МАН (обласний та республіканський рівень)	39	6	33
15	Основи наукових досліджень	39	18	21
	Всього	324	135	189



VII. ЗМІСТ ПРОГРАМИ.

1. Методи та форми наукових досліджень з математики в системі Малої академії наук. Презентація загальнодержавного науково-громадського проекту Мала академія наук України. (3 год.)

Історія Малої академії наук України. Структура Малої академії наук України, її цілі та задачі. Умови вступу до МАН.

2. Математична логіка (21 годин).

Найпростіші булеві функції. Нормальна форма булевої функції. Дешифрація запису арифметичної дії з цілими числами. Сюжетні задачі з відомою наперед кількістю персонажів (подій).

3. Комбінаторика (27годин).

Впорядкування чисел. Перестановки, розташування і комбінації: обчислення кількості й перебір. Реалізація невідомої наперед кількості вкладених циклів однією групою операторів. Період підстановки. Рекурентні співвідношення. Найдовша спільна підпоследовність двох последовностей.

4. Цілі числа та теорія многочленів. Подільність (24 годин).

Ділення цілих чисел з остачею. Найбільший спільний дільник. Алгоритм Евкліда. Найменше спільне кратне. Решето Ератосфена. Розклад на прості множники. Кількість дільників натурального числа. Класи еквівалентності остач. Позиційна система числення. Перехід від однієї системи числення до іншої. База мішаної системи числення. Факторіали й числа Фібоначчі як база системи числення. Перехід від багатовимірного масиву до лінійного й навпаки. Арифметичні дії з раціональними й багатоцифровими натуральними числами. Рекурентні співвідношення й різні системи числення. Десятковий запис дроби. Ланцюгові дроби.

Многочлени однієї змінної. Ділення многочленів з остачею. Найбільший спільний дільник многочленів. Раціональні корені многочлена з цілими коефіцієнтами. Схема Горнера (в тому числі для многочленів з раціональними коефіцієнтами й аргументами). Сума k -их степенів перших n натуральних чисел як многочлен змінної n . Числа Бернуллі.

5. Логічні задачі (15 годин).

Відновлення запису арифметичних дій з цілими числами. Сюжетні задачі логічного характеру з невідомою наперед кількістю персонажів.



6. Дійсні числа (15 годин).

Подання дійсного числа в ЕОМ. Арифметичний корінь. Наближене розв'язування нелінійних рівнянь відносно однієї змінної поділом відрізка навпіл.

7. Планіметрія (39години).

Визначення кута за його тригонометричними функціями. Перехід до екранних координат. Рівняння прямої. Симетрія відносно точки і прямої. Площа трикутника і многокутника. Взаємне розташування точки і трикутника, точки і многокутника (порівняння різних методів: кратність кількості перетинів, кут обертання радіус-вектора, обчислення площ). Обхід опуклого многокутника за периметром. Система лінійних неvierоджених рівнянь двох змінних. Сукупність прямокутників, сторони яких паралельні осям координат: площа і периметр об'єднання, перетину. Класифікація точок опуклого многокутника.

8. Стереометрія (39години).

Координатний простір. Рівняння площини і прямої. Кути між площинами, між прямими, між прямою та площиною. Паралельна й центральна проєкції. Рух геометричних тіл. Векторний і мішаний добуток. Системи лінійних неvierоджених рівнянь трьох змінних. Модель многогранника для побудови перерізу площиною. Відстань на поверхні многогранника (на прикладі куба). Класифікація точок опуклого многогранника. Розбиття опуклого многогранника на трикутні піраміди без спільних внутрішніх точок.

9. Методи оптимізації (21 годин).

Поняття про лінійне й опукле програмування функцій однієї і двох змінних, симплекс-метод. Метод динамічного програмування для скінченного простору станів (оптимальне розміщення капіталу і придбання наборів товарів). Задача комівояжера.

10. Елементи лінійної алгебри. (42 год.)

Основні поняття матричної алгебри: матриця, діагональна матриця, нульова матриця. Операції над матрицями, їх властивості. Визначники квадратних матриць, способи їх обчислення та їх властивості. Мінор, та алгебраїчне доповнення елемента квадратної матриці. Обернена матриця, її існування та єдиність, алгоритм обчислення. Системи лінійних рівнянь їх застосування. Сумісність, несумісність, означеність СЛР.



11. Практикум з задач конкурсів-захистів МАН (обласний та республіканський рівень) (39 год.)

Розв'язання задач вхідного тестування з математики (обласний рівень) 1999-2015 рік. Розв'язання задач контрольних робіт обласного та республіканських конкурсів-захисту робіт слухачів МАН 1999-2015 рік.

12. Основи наукових досліджень (18 год.)

Ознайомлення з основами наукових досліджень.

Методи і техніка дослідження. Використання методів наукового пізнання. Методи, що застосовуються на теоретичному та емпіричному рівнях досліджень. Застосування логічних законів і правил.

Методи теоретичного дослідження. Абстрагування. Аналіз. Синтез. Дедукція. Індукція. Топологізація. Періодизація. Описовий метод. Методи емпіричного дослідження.

Розгляд учнівських науково-дослідних робіт, представлених на обласних конкурсах-захистах

Критерії оцінки робіт МАН, правила оформлення конкурсної роботи. Джерела пошуку матеріалів для написання конкурсної роботи.

13. Конкурси, екскурсії, виставки, тематичні заходи (18 год.)

Участь у конференціях, конкурсах, захисті наукових робіт в системі МАН та інших заходах. Екскурсії, зустрічі з науковцями вищих навчальних закладів, наукові читання тощо.

14. Підсумкове заняття (3 год)

Підбиття підсумків роботи за навчальний рік. Виставка робіт учнів-гуртківців.



VIII. ПОУРОЧНЕ ПЛАНУВАННЯ РОБОТИ ГУРТКА (2 рік навчання).

№	Тема, розділ програми. Зміст роботи (на кожне заняття)	Вид роботи	годин и
1. Методи та форми наукових досліджень з математики в системі Малої академії наук. Презентація загальнодержавного науково-громадського проекту Мала академія наук України. (3 год.)			
1.	Історія Малої академії наук України. Структура Малої академії наук України, її цілі та задачі. Умови вступу до МАН.	Теоретичне заняття (т.з.)	3
2. Математична логіка (21 годин).			
2.	Висловлення. Бінарні та унарні логічні операції. Означення властивості	(т.з.)	3
3.	Основи логічні операції: кон'юнкція, диз'юнкція, імплікація, еквіваленція. Приклади застосувань логічних операцій.	Практичне заняття (п.з.)	3
4.	Логічні закони. Тавтології, заперечення та нейтральні формули. Метод від супротивного.	(т.з.)	3
5.	Розв'язання задач логічного характеру.(п.з.)	(п.з.)	3
6.	Найпростіші булеві функції. Нормальна форма булевої функції.	(т.з.)	3
7.	Дешифрація запису арифметичної дії з цілими числами.	(п.з.)	3
8.	Сюжетні задачі з відомою наперед кількістю персонажів (подій).	(п.з.)	3
3. Комбінаторика (27годин).			
9.	Впорядкування чисел. Перестановки, розташування і комбінації: обчислення кількості й перебір.	(т.з.)	3
10.	Властивості комбінацій. Модель „шахового містечка”.	(п.з.)	3
11.	Біном Ньютона. Трикутник Паскаля. Розкладання бінома.	(т.з.)	3
12.	Комбінаторні задачі. Способи розв'язання.	(п.з.)	3
13.	Комбінаторні задачі олімпіадного рівня.	(п.з.)	3
14.	Реалізація невідомої наперед кількості вкладених циклів однією групою операторів.	(п.з.)	3
15.	Період підстановки. Рекурентні співвідношення.	(т.з.)	3
16.	Найдовша спільна підпоследовність двох последовностей.	(п.з.)	3
17.	Розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	3
4. Цілі числа та теорія многочленів. Подільність (24 годин).			
18.	Ділення цілих чисел з остачею. Найбільший спільний дільник. Алгоритм Евкліда. Найменше спільне кратне. Решето Ератосфена.	(п.з.)	3



Гурток: «Математика. Позашкільний компонент»

19.	Розклад на прості множники. Кількість дільників натурального числа.	(п.з.)	3
20.	Класи еквівалентності остач. Позиційна система числення. Перехід від однієї системи числення до іншої. База мішаної системи числення.	(т.з.)	3
21.	Факторіали й числа Фібоначчі як база системи числення. Перехід від багатовимірного масиву до лінійного й навпаки.	(т.з.)	3
22.	Арифметичні дії з раціональними й багатоцифровими натуральними числами. Рекурентні співвідношення й різні системи числення. Десятковий запис дроби. Ланцюгові дроби.	(п.з.)	3
23.	Многочлени однієї змінної. Ділення многочленів з остачею. Найбільший спільний дільник многочленів.	(п.з.)	3
24.	Многочлени однієї змінної. Ділення многочленів з остачею. Найбільший спільний дільник многочленів.	(п.з.)	3
25.	Раціональні корені многочлена з цілими коефіцієнтами. Схема Горнера (в тому числі для многочленів з раціональними коефіцієнтами й аргументами). Сума k -их степенів перших n натуральних чисел як многочлен змінної n . Числа Бернуллі.	(т.з.)	3
5. Логічні задачі (15 годин).			
26.	Різні способи розв'язання логічних задач: метод таблиць, метод логічних операторів, метод графів.	(т.з.)	3
27.	Відновлення запису арифметичних дій з цілими числами.	(т.з.)	3
28.	Сюжетні задачі логічного характеру з невідомою наперед кількістю персонажів.	(п.з.)	3
29.	Розв'язання логічних задач.	(п.з.)	3
30.	Розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	3
6. Дійсні числа (15 годин).			
31.	Числові множини. Множина цілих та натуральних чисел. Означення раціонального, ірраціонального числа. Подання дійсного числа в ЕОМ.	(т.з.)	
32.	Арифметичний корінь. Властивості.	(п.з.)	
33.	Приклади розв'язання задач.	(п.з.)	
34.	Наближене розв'язування нелінійних рівнянь відносно однієї змінної поділом відрізка навпіл.	(т.з.)	
35.	Приклади розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	3
7. Планіметрія (39години).			
36.	Визначення кута за його тригонометричними функціями	(т.з.)	3
37.	Перехід до екранних координат. Рівняння прямої. Симетрія відносно точки і прямої.	(т.з.)	3
38.	Площа трикутника і многокутника. Приклади розв'язання задач.	(п.з.)	3
39.	Приклади розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	3



Гурток: «Математика. Позашкільний компонент»

40.	Взаємне розташування точки і трикутника(порівняння різних методів: кратність кількості перетинів, кут обертання радіус-вектора, обчислення площ).	(т.з.)	3
41.	Взаємне розташування точки і багатокутника (порівняння різних методів: кратність кількості перетинів, кут обертання радіус-вектора, обчислення площ).	(т.з.)	3
42.	Приклади розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	
43.	Обхід опуклого багатокутника за периметром	(т.з.)	3
44.	Система лінійних невідроджених рівнянь двох змінних.	(п.з.)	3
45.	Приклади розв'язання задач.	(п.з.)	3
46.	Сукупність прямокутників, сторони яких паралельні осям координат: площа і периметр об'єднання, перетину	(т.з.)	3
47.	Класифікація точок опуклого багатокутника.	(п.з.)	3
48.	Приклади розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	3
8. Стереометрія (39години).			
49.	Координатний простір. Рівняння площини і прямої.	(т.з.)	3
50.	Кути між площинами, між прямими, між прямою та площиною.	(т.з.)	3
51.	Паралельна й центральна проєкції. Рух геометричних тіл.	(п.з.)	3
52.	Векторний і мішаний добуток.	(т.з.)	3
53.	Приклади розв'язання задач.	(п.з.)	3
54.	Системи лінійних невідроджених рівнянь трьох змінних.	(т.з.)	3
55.	Приклади розв'язання задач.	(п.з.)	3
56.	Модель многогранника для побудови перерізу площиною.	(т.з.)	3
57.	Приклади розв'язання задач.	(п.з.)	3
58.	Відстань на поверхні многогранника (на прикладі куба).	(т.з.)	3
59.	Класифікація точок опуклого многогранника.	(п.з.)	3
60.	Розбиття опуклого многогранника на трикутні піраміди без спільних внутрішніх точок.	(п.з.)	3
61.	Приклади розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	3
Методи оптимізації (21 годин).			
62.	Поняття про лінійне й опукле програмування функцій однієї змінних.	(т.з.)	3
63.	Поняття про лінійне й опукле програмування функцій двох змінних.	(т.з.)	3
64.	Симплекс-метод.	(т.з.)	3
65.	Приклади розв'язання задач.	(п.з.)	3
66.	Метод динамічного програмування для скінченного простору станів (оптимальне розміщення капіталу і придбання наборів товарів).	(т.з.)	3
67.	Задача комівояжера.	(п.з.)	3
68.	Приклади розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	3
10. Елементи лінійної алгебри. (42 год.)			
69.	Основні поняття матричної алгебри: матриця, діагональна	(т.з.)	3



Гурток: «Математика. Позашкільний компонент»

	матриця, нульова матриця. Операції над матрицями, їх властивості.		
70.	Приклади розв'язання задач.	(п.з.)	3
71.	Визначники квадратних матриць, способи їх обчислення та їх властивості.	(т.з.)	3
72.	Приклади розв'язання задач.	(п.з.)	3
73.	Міnor, та алгебраїчне доповнення елемента квадратної матриці.	(т.з.)	3
74.	Обернена матриця, її існування та єдиність, алгоритм обчислення.	(п.з.)	3
75.	Приклади розв'язання задач.	(п.з.)	3
76.	Системи лінійних рівнянь їх застосування. Сумісність, несумісність, означеність СЛР.	(т.з.)	3
77.	Способи розв'язання систем лінійних рівнянь. Метод Гауса.	(т.з.)	3
78.	Приклади розв'язання задач.	(п.з.)	3
79.	Способи розв'язання систем лінійних рівнянь. Метод Крамера..	(т.з.)	3
80.	Приклади розв'язання задач.	(п.з.)	3
81.	Способи розв'язання систем лінійних рівнянь. Метод оберненої матриці. Матричні рівняння.	(т.з.)	3
82.	Приклади розв'язання задач. Доповіді учнів реферативного характеру.	(п.з.)	
11. Практикум з задач конкурсів-захистів МАН (обласний та республіканський рівень) (39 год.)			
83.	Вхідне тестування. Принципи та цілі. Розв'язання задач вхідного тестування з математики (обласний рівень) 1999-2001 рік.	(т.з.)	3
84.	Контрольна робота з математики на конкурсi- захисті.. Принципи та цілі. Розв'язання задач контрольних робіт обласного та республіканських конкурсів-захисту робіт слухачів МАН 1999-2000 рік.	(т.з.)	3
85.	Розв'язання задач контрольних робіт обласного та республіканських конкурсів-захисту робіт слухачів МАН 2001 рік.	(п.з.)	3
86.	Розв'язання задач вхідного тестування з математики (обласний рівень) 2002-2003 рік.	(п.з.)	3
87.	Розв'язання задач контрольних робіт обласного та республіканських конкурсів-захисту робіт слухачів МАН 2002-2003 рік.	(п.з.)	3
88.	Розв'язання задач вхідного тестування з математики (обласний рівень) 2004 рік.	(п.з.)	3
89.	Розв'язання задач контрольних робіт обласного та республіканських конкурсів-захисту робіт слухачів МАН 2005 рік.	(п.з.)	3
90.	Розв'язання задач вхідного тестування з математики (обласний рівень) 2006 рік.	(п.з.)	3
91.	Розв'язання задач контрольних робіт обласного та	(п.з.)	3



Гурток: «Математика. Позашкільний компонент»

	республіканських конкурсів-захисту робіт слухачів МАН 2007 рік.		
92.	Розв'язання задач вхідного тестування з математики (обласний рівень) 2008 рік.	(п.з.)	3
93.	Розв'язання задач контрольних робіт обласного та республіканських конкурсів-захисту робіт слухачів МАН 2009 рік.	(п.з.)	3
94.	Розв'язання задач вхідного тестування з математики (обласний рівень) 2010-2013 рік.	(т.з.)	3
95.	Розв'язання задач контрольних робіт обласного та республіканських конкурсів-захисту робіт слухачів МАН 20014 рік.	(п.з.)	3
96.	Розв'язання задач контрольних робіт обласного та республіканських конкурсів-захисту робіт слухачів МАН 2015 рік.	(п.з.)	
12. Основи наукових досліджень (18 год.)			
97.	Ознайомлення з основами наукових досліджень Ознайомлення з основами наукових досліджень. Методи і техніка дослідження. Використання методів наукового пізнання. Методи, що застосовуються на теоретичному та емпіричному рівнях досліджень. Застосування логічних законів і правил.	(т.з.)	3
98.	Методи теоретичного дослідження. Абстрагування. Аналіз. Синтез. Дедукція. Індукція. Типологізація. Періодизація. Описовий метод. Методи емпіричного дослідження.	(т.з.)	3
99.	Критерії оцінки робіт МАН, правила оформлення конкурсної роботи.	(п.з.)	3
100.	Джерела пошуку матеріалів для написання конкурсної роботи.	(п.з.)	3
101.	Розгляд учнівських науково-дослідних робіт, представлених на обласних конкурсах-захистах секція «математика»	(п.з.)	3
102.	Розгляд учнівських науково-дослідних робіт, представлених на обласних конкурсах-захистах секція «прикладна математика» та «математичне моделювання»	(п.з.)	3
13. Конкурси, екскурсії, виставки, тематичні заходи (18год.)			
103.	Зустрічі з науковцями вищих навчальних закладів. Екскурсія на кафедру вищої та прикладної математики Чорноморського державного університету імені Петра Могили	(п.з.)	3
104.	Зустрічі з науковцями вищих навчальних закладів. Екскурсія на кафедру вищої математики Національного університету кораблебудування імені професора Макарова	(п.з.)	3
105.	Зустрічі з науковцями вищих навчальних закладів. Екскурсія на кафедру математики МНУ імені В.О. Сухомлинського	(п.з.)	3

Гурток: «Математика. Позашкільний компонент»



106.	Попередній захист творчих робіт. Доповіді гуртківців.	(п.з.)	3
107.	Попередній захист творчих робіт. Доповіді гуртківців.	(п.з.)	3
14. Підсумкове заняття (3 год)			
108.	Підбиття підсумків роботи за навчальний рік. Виставка робіт учнів-гуртківців	(п.з.)	3



ІХ. ПРОГНОЗОВАНИЙ РЕЗУЛЬТАТ

1 рік навчання: Програма спрямована на досягнення таких **цілей**:

- інтелектуальний розвиток гуртківців, розвиток їхнього логічного мислення;
- опанування гуртківцями системи математичних знань та вмінь, що є базою для реалізації зазначених цілей: підвищення рівня знань з базової дисципліни «математика»;
- ознайомлення з принципами та ідеями загальнодержавного науково-громадського проекту Мала академія наук України;
- ознайомлення гуртківців з методами математики, як ефективного засобу моделювання і дослідження процесів навколишньої дійсності.

Після вивчення курсу учні **повинні знати**:

- алгоритми розв'язання базових задач, поданих як питання для теоретичного вивчення або як додаткові задачі;
- прийоми ефективного використання ресурсів у розв'язаннях базових задачах.

Завдяки використанню програми розширюється можливість доступу слухачів Малої академії наук до навчальних ресурсів, встановлюється швидкий обмін навчальною інформацією між викладачем, науковим керівникам і учням та контроль (самоконтроль) за виконанням навчальної програми.

2 рік навчання: Програма спрямована на досягнення таких **цілей**:

- інтелектуальний розвиток гуртківців, розвиток їхнього логічного мислення;
- опанування гуртківцями системи математичних знань та вмінь, що є базою для реалізації зазначених цілей: підвищення рівня знань з базової дисципліни «математика»;
- ознайомлення з принципами та ідеями загальнодержавного науково-громадського проекту Мала академія наук України;
- ознайомлення гуртківців з методами математики, як ефективного засобу моделювання і дослідження процесів навколишньої дійсності.

Після вивчення курсу учні **повинні вміти**:

- написати структуровану дослідницьку роботу до конкурсу захисту МАН;
- правильно надати список використаних джерел, оформити роботу за відповідними правилами;
- застосовувати алгоритми розв'язання базових задач, поданих як питання для теоретичного вивчення або як додаткові задачі;



▪ володіти прийоми ефективного використання ресурсів у розв'язаннях базових задачах.

Завдяки використанню програми встановлюється швидкий обмін навчальною інформацією між керівником гуртка і учнем та контроль (самоконтроль) за виконанням навчальної програми.

Програмою передбачено читання лекцій та проведення практичних занять.

Х. ТЕМАТИКА НАУКОВО-ДОСЛІДНИХ РОБІТ УЧНІВ ВІДДІЛЕННЯ МАТЕМАТИКИ МАН

1. Дві задачі про нерівності та їх узагальнення.
2. Деякі застосування комплексних чисел.
3. Ряд: числові, степеневі та їх застосування
4. Дослідження функціональних рівнянь.
5. Використання похідної в математиці та природознавстві.
6. Екстремуми функцій. Застосування комплексних чисел
7. Розв'язання геометричних задач на побудову
8. Теорема Рамсея.
9. Розв'язування олімпіадних задач за допомогою комплексних чисел
10. Розв'язування задач на побудову трикутника.
11. Використання інтегралів для обчислення площ і об'ємів фігур у суднобудуванні.
12. Коло в олімпіадних геометричних задачах.
13. Теорія графів та її застосування до розв'язування логічних задач
14. Інверсія відносно кола та прямої
15. Метод математичної індукції.
16. Розв'язування рівнянь та нерівностей з параметром графічним способом
17. Практичне значення диференціального числення.
18. Функціонально-графічний метод розв'язування задач з параметрами.
19. Нестандартні методи доведення нерівностей.
20. Деякі класичні задачі планіметрії та їх застосування до геометрії трикутника і кола
21. Булеві алгебри. Алгебра висловлень. Алгебра релейно-контактних схем
22. Прості числа та подільність
23. Функціональні рівняння в математичних олімпіадах
24. Побудова правильних багатокутників
25. Застосування нестандартних точок трикутник при розв'язуванні задач
26. Теорема Чеви та її застосування
27. Методи дослідження багатовимірних просторів



28. Математичне моделювання деяких проблем утилізації полімерних відходів
29. Комплексні числа та їх застосування в суднобудуванні
30. Особливості транспортної задачі
31. Деякі математичні моделі фінансових задач
32. Прийняття економічних рішень за умов невизначеності
33. Застосування групи підстановок у розв'язанні задач на перелік
34. Застосування класичних нерівностей для доведення геометричних
35. Задачі на обчислення кутів трикутника
36. Застосування похідної для розв'язання рівнянь з параметрами
37. Геометрія шестикутника на математичних олімпіадах
38. Діофантові рівняння і різні способи їх розв'язання
39. Доведення нерівностей
40. Задачі на подільність чисел та виразів
41. Методи візуалізації багатокутників
42. Математичне моделювання стрибків з трампліну
43. Диференціальні рівняння в біології та екології

XI. Доданок 1. ЛІТЕРАТУРА

1. Виленкин Н.Я. Комбинаторика. М.: Наука, 1969, 328 с.
2. Вишенський В.А., Дороговцев А.Я., Єжов І.І., Скороход А.В., Ядренко М.Й. Вибрані питання елементарної математики. К.: Вища школа, 1982, 455 .
3. Вишенський В.А., Перестюк М.О., Самойленко А.М. Збірник задач з математики. К.: Либідь, 1993, 344 .
4. В.А.Вишенський, Н.В.Карташов, В.І.Михайловський, М.І. Ядренко Київські математичні олімпіади. 1984-1993рр. – Київ: Либідь,1993.-144с.
5. В. А. Вишенський, О. Г. Ганюшкін, М. В. Карташов, В. І. Михайловський, Г. Й. Призва, М. Й. Ядренко, Українські математичні олімпіади. — Київ: Вища школа, 1993.—415с.
6. В. М. Лейфура, І. М. Мітельман, В. М. Радченко, В. А. Ясінський. Задачі міжнародних математичних олімпіад та методи їх розв'язання. - Львів: Євросвіт, 1999.-128с.
7. В.М. Лейфура. Математичні задачі евристичного характеру.-К.: Вища шк., 1992.-91с.
8. В.М.Лейфура. Задачі з цілими числами.-Х.:Вид.група „Основа”, 2003.-144с.
9. В. А Ясінський, В. М. Лейфура Алгебраїчні методи доведення геометричних нерівностей // Матеріали ІХ Міжнародної наукової



конференції ім. акад. М. Кравчука (16 – 19 травня 2002 р., Київ). – К., НТУУ “КПІ”, 2002. – с. 578.

10. В. А. Ясінський Застосування рівномірного руху до розв’язування планіметричних задач // Математика в школі, 2000, №2. – с. 38 – 40.

11. В. А. Ясінський, А. І. Воробйова, В. М. Лейфура Поговоримо про потужність множини // У світі математики. – 2000, т. 6, вип. 1. – с. 11 – 22.

12. В. О. Швець, В. А. Ясінський Про перетин трьох прямих в одній точці та перпендикулярність // Математика в школі, 1999, №1. – с. 50–51.

13. В. А. Ясінський Про застосування орієнтованої відстані // Математика в школі, 1999, №2. – с.35 – 37.

14. В. А. Ясінський Методика вивчення полярного перетворення на заняттях математичного гуртка // Матеріали Всеукраїнської науково-методичної конференції “Актуальні питання комплексної освіти у спеціалізованих навчальних закладах з підвищеними вимогами до вивчення природничо-математичних дисциплін” (23 – 27 вересня 1999 року, м. Одеса). – Одеса, “Астропринт”, 1999. – с. 258 – 264.

15. В. М. Лейфура, В. А. Ясінський Принцип крайнього // У світі математики. – 1997, т. 3, вип. 3. – с. 29 – 39.

16. В. А. Ясінський Поворот вектора на 60° // Матеріали II конференції Соросівських Учителів (20 – 21 квітня 1996 р., Київ). – К., (ISSEP), 1996. – с. 147 – 150.

17. Барковський В.В., Барковська Н.В., Лопатин О.К. ”Теорія ймовірностей та математична статистика”-Київ, ЦУЛ, 2002.-448 с.- Серія: Математические науки.

XII. Доданок 2. КАТАЛОГ ОСВІТНІХ РЕСУРСІВ З МАТЕМАТИКИ

◆ <http://www.man.gov.ua> –Мала академія наук

◆ Острів знань (математика)

http://www.ostriv.in.ua/index.php?option=com_menufolder&Itemid=198&ft=1

◆ Сайт КНУ ім. Т.Г.Шевченка: <http://www.univ.kiev.ua>

◆ <http://www.mathnet.spb.ru/> САЙТ ЭЛЕМЕНТАРНОЙ МАТЕМАТИКИ ДМИТРИЯ ГУЩИНА

<http://zaba.ru/> математические олимпиады и задачи.

◆ <http://www.exponenta.ru/> - образовательный математический сайт



- ◆ <http://www.mathsociety.kiev.ua/pratsi.html> Київське математичне товариство
- ◆ <http://www.allmath.ru/> - математический портал,
- ◆ <http://www.mathtest.ru/> Математика в помощь школьнику и студенту
- ◆ [Книги из серии "Библиотека «Математическое просвещение»"](#) - полные тексты научно-популярных книг по математике, в т.ч. серий тематических лекций, прочитанных на [Малом Мехмате МГУ](#)
- ◆ [Интернет библиотека](#)- собрание электронных версий любимых книг и журналов
- ◆ [Math.ru](#) - замечательные книги, бывшие в течение десятков лет настольными для многих школьных учителей математики, руководителей кружков, школьников, интересующихся точными науками
- ◆ [Интернет-проект «Задачи»](#) предназначен для учителей и преподавателей, как помощь при подготовке уроков, кружков и факультативных занятий в школе.
- ◆ [МЦНМО](#)- Московский центр непрерывного математического образования
- ◆ [популярні лекції](#) з математики
- ◆ [Приглашение в мир математики](#) - Портфолио учителя математики, задачи олимпиады Кенгуру, конкурса IBM Ponder This, статьи, веб-обзоры, проекты Intel
- ◆ Блог естонських вчителів [Тригонометрия](#)
- ◆ Блог [Этот трехмерный, трехмерный мир](#)
- ◆ [Сообщество учителей математики](#)
- ◆ Дистанционный курс [Диалоги о "Стереометрии"](#)
- ◆ [Геометрический портал России](#)
- ◆ [Математика он-лайн](#), занимательная математика - школьникам
- ◆ [Виртуальная школа юного математика](#)
- ◆ http://www.mathsociety.kiev.ua/members_short.html

- ◆ <http://www.imath.kiev.ua/~golub/umsites.html> Вибрані математичні сайти.

- ◆ http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?option_lang=rus
- ◆ [Лекции летней школы "Современная математика"](#)
- ◆ http://www.mathnet.ru/php/presentation.phtml?eventID=6&option_lang=rus#PRELIST Популярные лекции по математике, прочитанные на [Малом мехмате МГУ](#)
- ◆ <http://www.mi.ras.ru/index.php?c=about&m=1> Математический институт им. В. А. Стеклова Российской академии



- ◆ <http://www.mi.ras.ru/index.php?c=noc> Научно-образовательный центр при МИАН
- ◆ <http://www.mathnet.ru/> Общероссийский математический портал
Информационная система Math-Net.Ru — это общероссийский математический портал, предоставляющий российским и зарубежным математикам различные возможности в поиске информации о математической жизни в России.
- ◆ Абелівська премія - <http://www.abelprisen.no/en/>
- ◆ Архів історії математики МакТьютора - http://www-history.mcs.st_and.ac.uk/~history/
- ◆ Асоціація Бурбакі - <http://www.dma.ens.fr/users/bourbaki/>
- ◆ Асоціація користувачів кирилічного TeXy - <http://www.cemi.rssi.ru/cyrtug/>
- ◆ Галерея інтерактивної онлайнної геометрії - <http://www.geom.uiuc.edu/apps/gallery.html>
- ◆ Домашня сторінка історії теорії апроксимації - <http://www.math.technion.ac.il/hat/>
- ◆ Домашня сторінка математичної беллетристики - <http://math.cofc.edu/faculty/kasman/MATHFICT/Default.html>
- ◆ Домашня сторінка поліномів Кравчука - <http://orthpol.narod.ru/>
- ◆ Електронний світовий вказівник математиків (EWDМ) - <http://www.mathunion.org/ewdm/>
- ◆ Етимологія математичних термінів - <http://etimologi-term.narod.ru/>
- ◆ Збірник анотованих посилань - <http://zbornik.narod.ru/>
- ◆ Інтернетівський путівник з фізики - <http://www.tp.umu.se/TIPTOP/>
- ◆ Математична предметна класифікація 2000 - <http://www.ams.org/msc/>
- ◆ Математична енциклопедія (білоруською мовою) - <http://slounik.org/e/6>
- ◆ Математичний освітньо-інформаційний сервер - <http://matan.alpol.ru/>
- ◆ Математичні константи (by Steven R. Finch)- <http://pauillac.inria.fr/algo/bsolve/constant/>
- ◆ Математичні сайти світу (Penn State Mathematics Department) - <http://www.math.psu.edu/MathLists/Contents.html>
- ◆ Міністерство науки і освіти України - <http://www.mon.gov.ua/>
- ◆ Московський центр неперервної математичної освіти - <http://www.mccme.ru/>
- ◆ Науковий портал механіко-математичного факультету МГУ - <http://shade.lcm.msu.ru:8080/index.jsp>
- ◆ Огляди з теорії апроксимації - <http://www.math.technion.ac.il/sat/>



- ◆ "ПОИСК" - щотижнева газета наукової спільноти - <http://www.poisknews.ru/ingz/default.asp>
- ◆ Проблеми Тисячоліття (Clay Mathematics Institute) - <http://claymath.org/millennium/>
- ◆ Проект "Математика і мистецтво" - <http://www-uk.hpl.hp.com/brims/art/index.html>
- ◆ Сервер математичних цитат - <http://math.furman.edu/~mwoodard/mquot.html>
- ◆ Словник видавництва Academic Press з науки та техніки - <http://www.harcourt.com/dictionary/>
- ◆ Словник математичних помилок - <http://members.cox.net/mathmistakes/>
- ◆ EqWorld: Світ математичних рівнянь - <http://eqworld.ipmnet.ru/>
- ◆ MATHWORLD: Найширший математичний ресурс інтернету - <http://mathworld.wolfram.com/>

Математичні бібліотеки

- Білоруська наукова бібліотека - <http://lib.org.by/>
- Ваша бібліотека безкоштовних електронних книг - <http://www.eknigu.com/>
- ВЕБЛІОТЕКА: Інтернет-бібліотека Видавництва Фізико-математичної літератури - <http://fizmatlit.narod.ru/webrary/>
- Велика наукова бібліотека - <http://sci-lib.com/>
- Віртуальна математична бібліотека - <http://euclid.math.fsu.edu/Science/math.html>
- Інтернет-бібліотека з математики - <http://www.mccme.ru/free-books/ilib.htm>
- Міжнародна цифрова електронна бібліотека (IDEAL) - <http://www.sciencedirect.com/science/journals/>
- Національні бібліотеки світу - <http://www.nlc-bnc.ca/ifla/II/natlibs.htm>
- Фізико-математична бібліотека - <http://ftp.kinetics.nsc.ru/chichinin/pmlc.htm>
- Цифрова бібліотека наукової літератури - <http://researchindex.com/>
- Цифрова бібліотека наукової літератури - <http://citeseer.ist.psu.edu/>
- DjVu Library Математична бібліотека - <http://djvu-lib.narod.ru/index-all.html>



XIII. Доданок 3. СЛОВНИК МАТЕМАТИЧНИХ ТЕРМІНІВ

№ з/п	English	Українська мова	Російська мова
1	Abscissa	абсциса	абсцисса
2	Angle	кут	угол
3	Area	площа	площадь
4	Asymptotes	асимптота	асимптота
5	Center of mass	центр мас	центр масс
6	Complex numbers	комплексні числа	комплексные числа
7	Components of vector	складова вектора	компонента вектора
8	Composite function	складена функція	сложная функция
9	Cone	конус	конус
10	Constant of integration	стала інтегрування	постоянная интегрирования
11	Coordinate axes	координатна вісь	ось координат
12	Coordinates	координати	координаты
13	- cylindrical	- циліндричні	- цилиндрические
14	- polar	- полярні	- полярные
15	- spherical	- сферичні	- сферические
16	Critical point	критична точка	критическая точка
17	Curve	крива	кривая
18	Definite integral	визначений інтеграл	определенный интеграл
19	Derivative	похідна	производная
20	Determinant	визначник	определитель
21	Differentiable function	диференційована функція	дифференцируемая функция
23	Differential equation	диференціальне рівняння	дифференциальное уравнение
24	Double integral	подвійний інтеграл	двойной интеграл
25	Ellipse	еліпс	эллипс
26	Focus	фокус	фокус
27	Function	функція	функция
28	Gradient of a function	градієнт функції	градиент функции
29	Hyperbola	гіпербола	гипербола
30	Hyperboloid	гіперболоїд	гиперболоид
31	-of one sheet	- однопорожневий	- однополостный
32	-of two sheets	- друпорожневий	- двухполостный



Гурток: «Математика. Позашкільний компонент»

33	Indefinite integral	невизначений інтеграл	неопределенный интеграл
34	Infinite series	нескінченний ряд	бесконечный ряд
35	Inverse function	обернена функція	обратная функция
36	Irrational number	іраціональне число	иррациональное число
37	Limit	границя	предел
38	Lines	пряма лінія	прямая
39	Local extreme	локальний екстремум	локальный экстремум
40	Open interval	відкритий інтервал	открытый интервал
41	Orthogonal vector	перпендикулярні вектори	перпендикулярные векторы
42	Parabola	парабола	парабола
43	Periodic function	періодична функція	периодическая функция
44	Polar coordinates	полярні координати	полярные координаты
45	Rational function	раціональна функція	рациональная функция
46	Real number	дійсне число	действительное число
47	Scalar	скаляр	скаляр
48	Sphere	сфера	сфера
49	Taylor polynomial	многочлен Тейлора	многочлен Тейлора
50	Taylor's formula	формула Тейлора	формула Тейлора
51	Vector	вектор	вектор
52	Vector function	векторна функція	векторная функция
53	x-axe	вісь x-ів	ось x-ов
54	zero vector	нульовий вектор	нулевой вектор

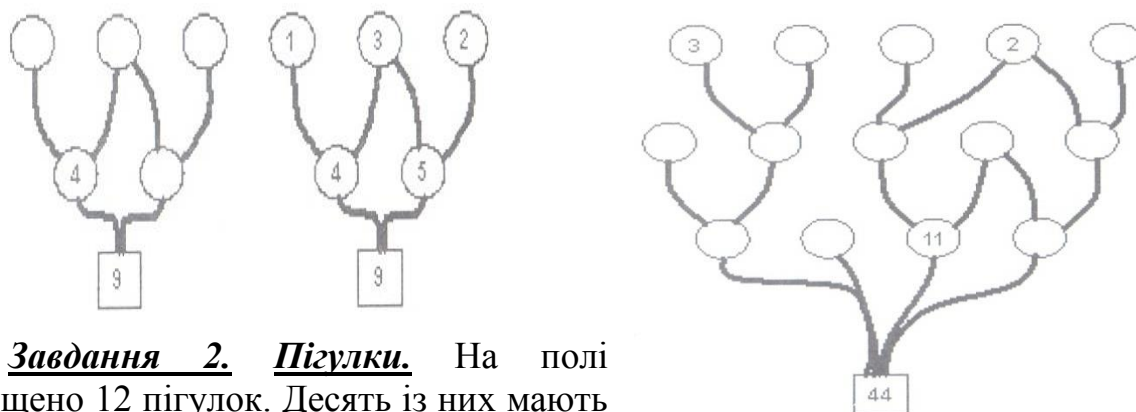


XIV. Методична розробка до практичної частини: ЗАДАЧІ – «РОДЗИНКИ» ТА ЗАДАЧІ – «ФОРТЕЦІ»

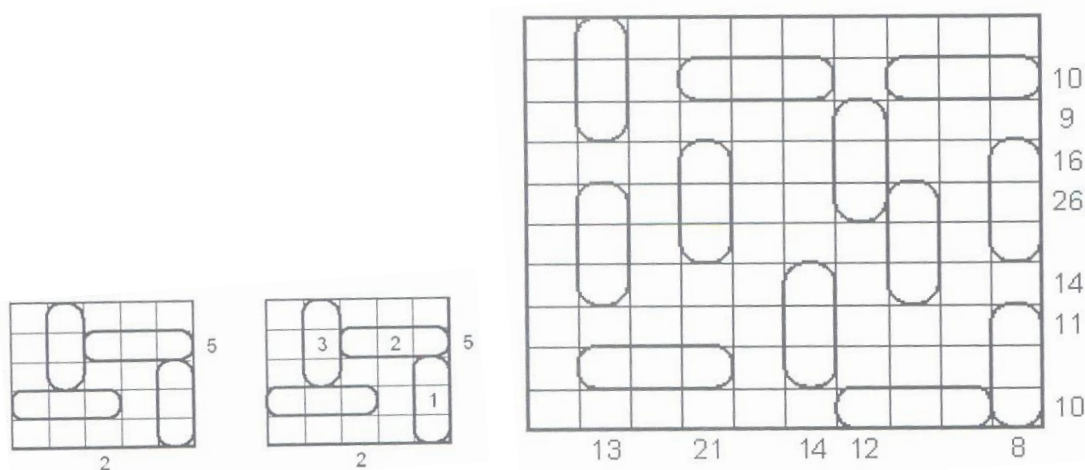


Текстові логіголовки

Завдання 1. Дерево. У кружечки необхідно вписати числа від 1 до 14 кожне рівно по одному разу. Якщо від кружечка відходять лінії нагору (гілки), то число в кружечку дорівнює сумі чисел на цих гілках. Число в «корені» теж є сумою чисел на гілках «нижнього ярусу». Деякі числа вже дані.

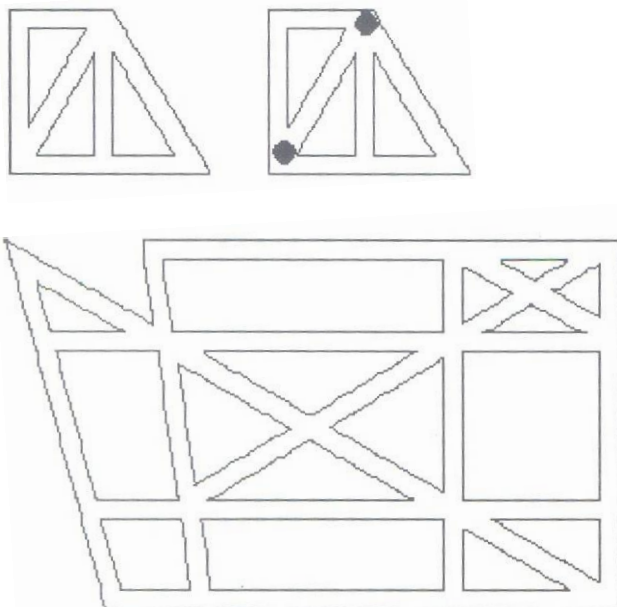


Завдання 2. Пігулки. На полі розміщено 12 пігулок. Десять із них мають номери від 1 до 10 (по одному разу), дві пігулки не мають номерів. Числа по краях квадрата вказують суму номерів пігулок, що зустрічаються в даному рядку або стовпчику. Відновіть номери пігулок.

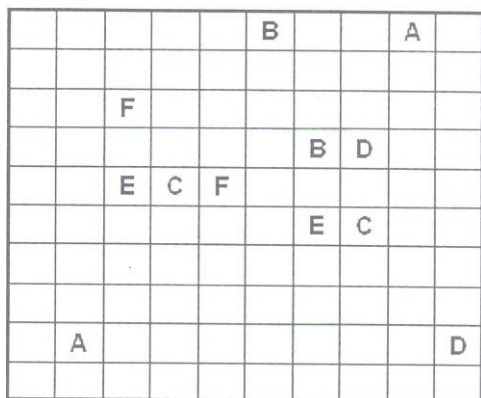
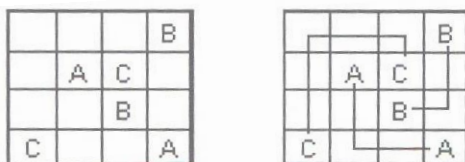




Завдання 3. Поліцейські. Перед вами – план невеликого міста. Поліцейський, що стоїть на перехресті, проглядає всі вулиці, що сходяться в цьому перехресті. Необхідно розмістити на перехрестях чотирьох поліцейських, щоб вони могли бачити всі вулиці міста.



Завдання 4. Пари. З'єднайте однакові букви лініями, що проходять через центри клітинок. Лінії проходять із клітинки в клітинку горизонтально або вертикально. Лінії не повинні перетинатися. Кожна клітинка має використовуватися рівно один раз.





Завдання 5. Прямокутники. Розділіть сітку на прямокутники так, щоб кожен прямокутник містив як мінімум одне число. Кожне число в прямокутнику має дорівнювати довжині однієї з його сторін (прямокутник 2×4 містить числа 2 і 4 у будь-якій кількості, квадрат 3×3 - 3 у будь-якій кількості). Усі прямокутники мають бути різних розмірів, незалежно від орієнтації (не можна одночасно використовувати прямокутники 3×1 і 1×3).

2			3
4			1

2			3
4			1

	2		4		4	
						1
	2					
3						6
					2	
4						
	3		1		4	

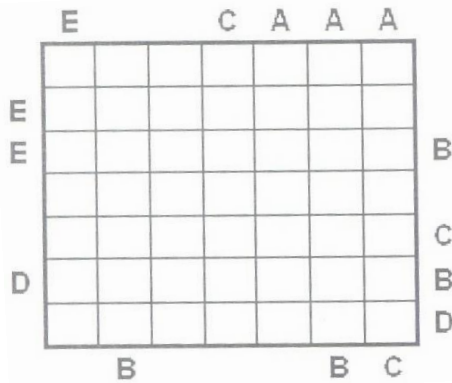
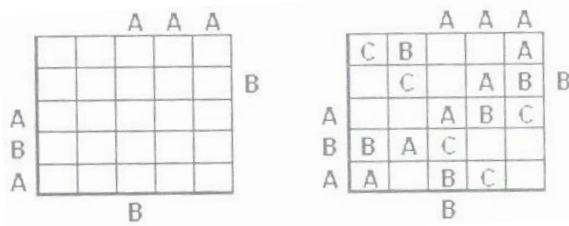
Завдання 6. Множення. У квадраті необхідно розставити різні цілі числа – по числах в кожному рядку й стовпчику. Числа по краях квадрата показують добуток чисел, що знаходяться у даному рядку або стовпчику.

						42
						56
			2	21		42
	7				8	56
	9			3		27
			15			60
			6	1		6
						50
						36
						15
						32
						30
						96
						60
54	64	32	45	60	10	

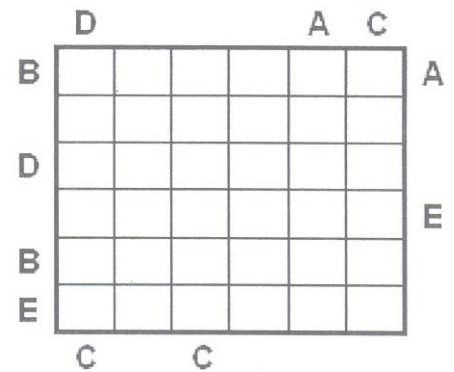
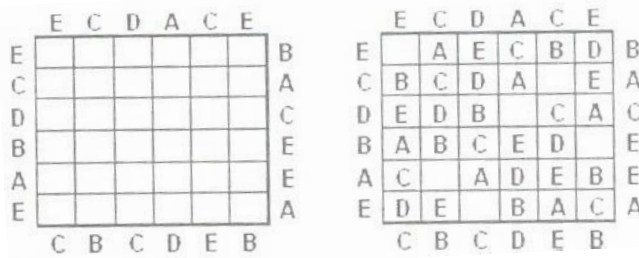
Завдання 7. Перші зустрічні. У порожні клітинки таблиці необхідно вписати букви А В С Д Е (у прикладі А В С) так, щоб у кожному рядку й у кожному стовпчику всі букви зустрілися рівно по одному разу. Деякі клітинки залишаються порожніми. Букви по краях квадрата вказують, яка з букв зустрінеється ПЕРШОЮ в даному рядку або стовпчику в цьому напрямку.



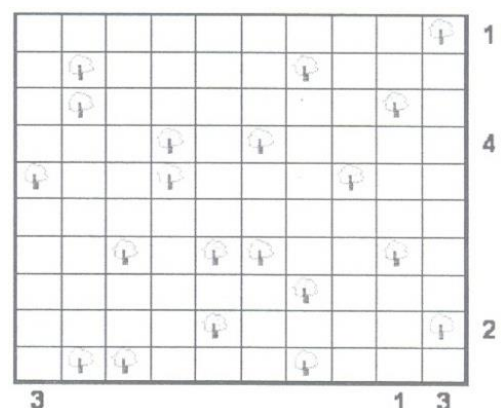
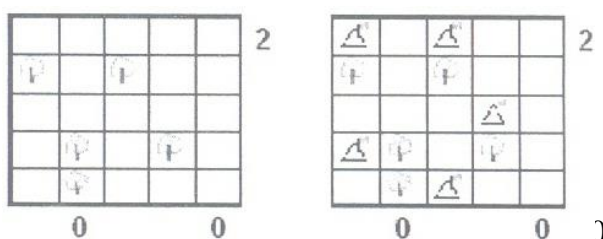
Гурток: «Математика. Позашкільний компонент»



Завдання 8. Другі зустрічні. У порожні клітинки таблиці необхідно вписати букви А В С Д Е так, щоб у кожному рядку всі букви зустрілися рівно по одному разу. Деякі клітинки залишаються порожніми. Букви по краях квадрата вказують, яка з букв зустрінеється ДРУГОЮ у даному рядку або стовпчику в цьому напрямку.



Завдання 9. Намети. Сітка являє собою план лісі, у якому розміщена деяка кількість дерев. До кожного дерева прив'язано рівно один намет (намет перебуває в клітинці, яка межує із деревом по стороні). Клітинки з наметами не можуть торкатися одна одній ні стороною, ні кутом. Числа по краях «лісу» показують, скільки наметів знаходиться в даному рядку або стовпчику.





Завдання 10. Сума. У наведеній числовій сітці необхідно розмістити наведену фігуру. Фігуру можна повертати, але не можна віддзеркалювати (перевертати). Необхідно максимізувати суму накритих фігурою чисел.

7	5	1	0	2	8	2	0
8	1	6	4	0	6	2	8
4	8	2	5	3	4	2	1
8	6	5	1	3	2	8	2
6	0	9	5	5	0	5	8
8	1	2	8	2	8	1	1
0	1	9	3	8	5	2	1
9	4	8	9	5	4	9	3



$$\text{Оцінка} = \text{Сума}/2 - 25$$

У наведеному прикладі Сума = 54, оцінка = 2 бали.



Задачі для наймолодших школярів



Задача 1. Скільки років дітям? В родині є троє дітей. Степану вдвічі більше років, ніж буде Оксані тоді, коли Миколі виповниться стільки років, скільки Степану зараз. Скільки років зараз Степану, Оксані й Миколі, якщо разом їм 19 років?

Задача 2. Хто де живе? На острові Трисельському є три села: Правдово, Чергуново та Неправдово. Відомо, що жителі першого села завжди кажуть правду, мешканці третього села завжди кажуть неправду, а у відповідях чергуновців неправда чергується з правдою (перша відповідь чергуновця може бути як правдою, так і неправдою).

Якось приїжджий зустрів п'ятьох остров'ян, яким він за характерними рисами їхньої зовнішності думці дав такі прізвиська: Косооко, Борода, Кирпань, Червонощок, Довгоух. Бажаючи з'ясувати, в яких селах ці люди живуть, приїжджий попросив двох з них розповісти, хто з якого села родом.

Косооко відповідав, що Борода – чергуновець, Кирпань – правдовець, Червонощок теж родом із Чергуново, а Довгоух - з Неправдово.

Борода ж твердив, що Косооко – чергуновець, Кирпань із Неправдово, Червонощок – правдовець, а Довгоух із Чергуново.

Чи можна на підставі отриманих відповідей зробити правильні висновки про рідне село кожного з остров'ян?

Задача 3. Розподіл ролей. У шкільному драмгуртку вирішили ставити «Лісову пісню» Лесі Українки. Та при розподілі жіночих ролей виникла суперечка. Оксана сказала, що погоджується грати лише Русалку або Мавку. Те ж саме заявила й Леся. Марійка сказала, що теж мріє про роль Русалки. У крайньому випадку погоджується на роль Матері Лукаша. Роль Мавки дуже просила Ганна, але сказала, що погоджується уступити їй, якщо їй нададуть можливість зіграти роль Килини.

– Ні, я буду Килиною, - заявила Катя, - а ні, то дайте мені роль Русалки Польової.

Чи можна розподілити ролі так, щоб усі були задоволені?

Задача 4. Футбольний матч. У футбольних змаганнях з футболу за кубок змагалися три команди: «Альфа», «Бета» і «Гамма». Змагання проводили



у два кола. У першому «Альфа» жодного разу не програла, «Бета» не мала нічийх, а «Гамма» жодного разу не виграла.

У другому колі «Альфа» жодного разу не виграла. «Бета» - не програла, а «Гамма» не зіграла внічию. У результаті для визначення переможця мав відбутися додатковий матч.

Як зіграли у другому колі «Альфа» і «Бета»?

Задача 5. Які числа перемножили? На класній дошці виконали дію множення. Потім частину цифр стерли і замінили зірочками. Пропонується відновити стерті цифри:

Логічні задачі та лами головки

$$\begin{array}{r}
 * * * \\
 * * * \\
 \hline
 * * * \\
 * * * * \\
 \hline
 * * * * \\
 * * * * \\
 \hline
 * * 2 * 0
 \end{array}$$

Задача 1. Скільки братів та сестер?

Максим та Світлана живуть в одному будинку. У Максима братів та сестер порівну. У Світлани сестер втриє більше, ніж у Максима, а всього стільки, скільки дітей у батьків Максима. Визначте, скільки братів та сестер у Максима та скільки сестер у Світлани?

Задача 2. Визначте час. Батько зателефонував дочці і сказав, що він скоро буде. Світлана уточнила: «А о котрій годині?» Батько відповів: «Полічи, коли я приїду, до кінця доби залишиться втриє менше того часу, який пройде від її початку». Визначте, о котрій годині батько Світлани буде дома?

Задача 3. Сума чисел. Сума п'яти послідовних чисел дорівнює числу 1989. Знайдіть ці числа.

Задача 4. Унікальне число. Знайдіть найменше число, яке ділиться без залишку на наступні 9 чисел: 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9 та 10.

Задача 5. Визначте множник та множене. Добуток двох чисел дорівнює числу, яке записується трьома послідовними числами 123. Чому дорівнюють множник та множене, якщо відомо, що обидва вони менші числа 3?

Задача 6. «Полкан» та «Доклад» (криптографічна ламиголовка). Розшифруйте цікаві приклади на додавання, в яких однаковими буквами зашифровані однакові цифри, а різними буквами – різні цифри.

ПОЛКАН	ДОКЛАД
ПОЛКА	ОКЛАД
ПОЛК	КЛАД
ПОЛ	ЛАД
ПО	АД
П	Д
<hr/>	
СУММА 'Н'	СУММА 'А'



Відповіді та вказівки.

1. У Максима 1 брат і 1 сестра. У Світлани 3 сестри. *Розв'язок.* В сім'ї Максима A сестер, у Світлани – $3A$. Всього дітей у першій сім'ї – $2A+1$. За умовою задачі з $A=2A+1$. Звідси визначаємо. Чому дорівнює A : $3A-2A=1$, $A=1$. Звідси зробимо висновок: у Максима 1 брат і 1 сестра, у Світлани – 3 сестри.
2. О шостій годині вечора (18-00) Одна частина доби складає: $24:4=6$ годин. Три частини відповідно - $3 \times 6=18$
3. Шукані числа: 395, 396, 397, 398, 399
4. Шукане число: 2520
5. -41 та -3. $((-41) \times (-3)=123)$
6. $173802 + 17380 + 1738 + 17 + 1 = 964402$, $173802 + 17380 + 1738 + 173 + 17 + 1 = 964405$

Таємниці натуральних чисел. Подільність суми, різниці, добутку.

Задача 1. Число $a+1$ ділиться на 3. Довести, що число $5+8a$ також ділиться на 3.

Задача 2. Число $a+2$ і $35-b$ ділиться на 11. Довести, що число $a+b$ також ділиться на 11.

Задача 3. Число a^2 ділиться на $a+b$. Довести, що число b^2 також ділиться на $a+b$.

Задача 4. Кожне з чисел $a+b$ і ab ділиться на число c . Довести, що а) a^2+b^2 ділиться на c ,

б) $a^3 + b^3$ ділиться на c^2 .

Задача 5. Довести, що число $a^4 + 4b^4$ ділиться на $a^2+2ab+2b^2$.

Задача 6. Довести, що число $a^3 - a$ ділиться на 6 при будь-якому цілому a .

Задача 7. Довести, що число $a^3 - a$ ділиться на 24 при будь-якому непарному a .

Задача 8. Число $a+ b +c$ ділиться на 6. Довести, що число $a^3 + b^3 +c^3$ також ділиться на 6.



Задача 9. Довести, що при кожному цілому a число $a^3 - 3a^2 + 2a$ ділиться на 6.

Задача 10. Довести, що число $a^5 - 5a^3 + 4a$ ділиться на 120 при будь-якому цілому a .

Розв'язання задач.

Задача 1. Зауважимо, що $5 + 8a = 5(a+1) + 3a$. Оскільки $a+1$ ділиться на 3, то згідно з теоремою 1 число $5(a+1) = 3a$ ділиться на 3.

Задача 2. Зауважимо, що згідно з теоремою 1 число $c = (a+2) - (35 - b) = (a+b) - 33$ ділиться на 11. Тому $a + b = c + 33$ ділиться на 11.

Задача 3. Відзначимо, що $b^2 = a^2 - (a^2 - b^2) = a^2 - (a - b)(a + b)$, звідки випливає, що b^2 ділиться на $a + b$ бо за припущенням a^2 ділиться на $a + b$.

Задача 4. 4а. Маємо $a^2 + b^2 = (a + b)^2 - 2ab$. Оскільки $a + b$ і ab діляться на c , то $a^2 + b^2$ ділиться на c .

4б. Оскільки $a^3 + b^3 = (a+b)(a^2 - ab + b^2)$ і числа $a^2 + b^2$, ab та $a + b$ діляться на c , то $a^3 + b^3$ ділиться на c^2 .

Задача 5. Маємо $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4a^2b^2 + 4b^4 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$.

Задача 6. Відзначимо, що $a^3 - a = a(a^2 - 1) = (a-1)a(a+1)$. Добуток трьох послідовних чисел ділиться на 3. Справді, якщо a ділиться на 3, то $a = 3k$ і тому $(a-1)a(a+1) = (3k-1)3k(3k+1) = 3(3k-1)k(3k+1)$ також ділиться на 3. Якщо a дає в остачі 1, то $a = 3k+1$ і $(a-1)a(a+1) = 3k(3k+1)(3k+2)$ ділиться на 3. Якщо ж a дає в остачі 2, то $a = 3k+2$ і $(a-1)a(a+1) = (3k+1)(3k+2)(3k+3) = 3(3k+1)(3k+2)(k+1)$ ділиться на 3. З двох послідовних цілих чисел $a-1$ і a одне ділиться на 2. Тому $(a-1)a(a+1)$ ділиться на 6.

Задача 7. Вже доведено, що $a^3 - a$ ділиться на 3. Нехай a непарне число, $a = 2r+1$, де r - ціле число. Тоді $a^3 - a = (a-1)a(a+1) = 2r(2r+1)(2r+2) = 4(2r+1)r$



$(r+1)$. З двох послідовних чисел r і $r+1$ одне ділиться на 2. Тому $a^3 - a$ ділиться на 8.

Задача 8. Маємо $a^3 + b^3 + c^3 = (a^3 - a) + (b^3 - b) + (c^3 - c) + (a + b + c)$.

Оскільки числа $a^3 - a$, $b^3 - b$, $c^3 - c$ та $a + b + c$ діляться на 6, то і $a^3 + b^3 + c^3$ діляться на 6.

Задача 9. Вказівка: $a^3 - 3a^2 + 2a = a^3 - a - 3a(a-1)$

Задача 10. Вказівка: $a^5 - 5a^3 + 4a = a \cdot [(a^4 - a^2) - 4(a^2 - 1)]$

$= a(a^2 - 1)(a^2 - 4) = (a-2)(a-1)a(a+1)(a+2)$.

Теорема 1. Якщо числа a і b діляться на c , то їх сума $a + b$ і різниця $a - b$ також діляться на c .

Комбінаторика

Задача 1. Скількома способами можна розташувати на полиці три книги? (A, B, C)

Розв'язок: Один із шляхів розв'язку цієї задачі полягає в тому, що ми випишемо всі можливі комбінації та підрахуємо їх. Розміркуємо так. В задачі необхідно заповнити три місця на полиці – зобразимо їх таким чином: На перше місце може бути поставлено книгу A, або B, або C. Тому перше місце можна заповнити трьома способами.

Для кожного з трьох випадків заповнення першого місця ми маємо лише два варіанта заповнення другого місця тому, що у нас залишилось лише дві з трьох книжок, і ми можемо взяти будь-яку з них. Таким чином перші два місця ми можемо заповнити 2×3 або шістьма способами. Нарешті, для кожного з

шести варіантів заповнення перших двох місць існує лише один варіант заповнення третього, адже лишається тільки одна книга.

Отже, всі три місця ми можемо заповнити 6×1 або шістьма способами і

наш малюнок виглядатиме так: 3 2 1

Загальну кількість розміщень отримаємо множенням: $3 \times 2 \times 1 = 6$.

Зупинімось на хвилину і з'ясуємо, що означає для нас слово «розміщення». Ми говорили у розглянутому прикладі про розміщення трьох книг на полиці. Але ж буває також розміщення квітів у вазі, плям на скатертині, тощо....



Домовимось, що надалі будемо розглядати лише особливий вид розміщення, а саме лінійне розміщення, тобто таке впорядкування об'єктів (предметів), яке подібне до розміщення точок на прямій і назвемо таке розміщення. Щоб уникнути плутанини «перестановками».

Отже, перестановка – це будь-яке розміщення деякої кількості об'єктів (предметів) у певному лінійному порядку.

Задача 2. Ми маємо не менше трьох екземплярів книги А, не менше трьох екземплярів книги В і не менше трьох екземплярів книги С. Скількома різними способами можна розташувати на полиці три книги, вважаючи, що екземпляри однієї книги не можна розрізнити?

Розв'язок. Оскільки тепер ми маємо по три екземпляри кожної книги, то можливі і такі випадки: ААА, АВВ, СВС та ін. Перший крок буде таким самим як і в першому прикладі. Друге ж місце можна заповнити вже трьома способами, адже крім двох книг, що залишилися, ми маємо ще один екземпляр книги, яку вже брали раніше. Розмірковуючи так само, побачимо, що і третє місце можна заповнити трьома способами. А всього розміщень буде $3 \times 3 \times 3 = 27$. Узагальнюючи розглянуті приклади, отримаємо універсальний

метод розв'язку задач на перестановки.

Задача 3. Номер автомобіля складено з двох літер, за якими йде трьох значне число. Скільки існує різних номерів такого типу?

Розв'язок. Бачимо, що такий автомобільний номер складається з п'ятих місць, причому на перші два можна поставити будь-які літери (навіть однакові), а на решту три цифри (також без обмежень). Згадавши, що наш алфавіт має 32 літери, а цифр всього 10 (враховуючи 0), отримаємо: $32 \times 32 \times 10 \times 10 \times 10 = 1024000$.

Задача 4. Нехай в попередньому прикладі треба ставити букви, що мають аналоги в латинському алфавіті, а цифри виключають комбінацію 666 (з деяких містичних міркувань).

Розв'язок: 1) Подивимось, які букви українського алфавіту можуть бути використані:

А,Б,В,Г,Д,Е,Є,Ж,З,И,І,Ї,Й,К,Л,М,Н,О,П,Р,С,Т,У,Ф,Х,Ц,Ч,Ш,Щ,Ь,Ю,Я. Всього 12. 2) Щодо цифр, зауважимо, що на перших двох місцях може бути будь-яка цифра, включаючи 6, а на третьому – виключаючи 6 (може бути 661, 669 і т.д.). Маємо: $12 \times 12 \times 10 \times 10 \times 9 = 129600$.

Задача 5. Скільки чотиризначних чисел можна скласти, використовуючи цифри 1,2,3,4,5, якщо а) ніяка цифра не зустрічається більше, ніж один раз; б) повторення цифр можливе; в) числа повинні бути непарними і всі цифри ф них різні.



Гурток: «Математика. Позашкільний компонент»

Розв'язок. Зауважимо, що перераховувати всі складені числа не потрібно, а необхідно лише вказати їх кількість. Приклади а)-б) наведемо без ґрунтовних розміркувань:

а) $5 \times 4 \times 3 \times 2 = 120$ чотиризначних чисел (без повторень цифр);

б) $5 \times 5 \times 5 \times 5 = 5^4 = 625$ чотиризначних чисел (з повторенням цифр);

в) якщо число повинно бути непарним, тоді остання його цифра може бути або 1, або 3, або 5. Тому на четверте місце можна поставити одну з них.

Після цього на четверте, третє, друге та перше місце можна поставити чотири, три та дві цифри відповідно (бо повторення цифр не може бути). Маємо: $2 \times 3 \times 4 \times 3 = 72$.

Задача 6. Для виготовлення піци до сиру додають різні компоненти, що надають той або інший смак страви. Білл має перець, цибулю, сосиски, гриби та анчоуси, причому, по його розумінню, все це разом чи окремо можна додавати до сиру. Скільки типів піци може виготовити Білл?

Зауваження. В розпорядженні кухаря п'ять компонент, причому відносно кожної може бути розглянуто два випадки – включення до піци чи ні. Отже, всього випадків $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5 = 32$.

Задача 7. В нашому розпорядженні є три різні прапорці для передачі певних сигналів, причому сигнал складається не менше ніж з двох прапорців і порядок їхній при цьому враховується. Скільки різних сигналів може бути подано таким чином?

Розв'язок. Домовимось першою дією вважати сигнал, який складається з двох піднятих прапорців. За принципом множення його можна виконати $3 \times 2 = 6$ способами. Інша дія – підйом трьох прапорців; вона може бути

виконана $3 \times 2 \times 1 = 6$ способами. Оскільки ми виконуємо або першу дію, або

другу, але не першу, а потім другу, то принцип множення в даному випадку не діє. Наші дії взаємно виключають одна одну: вони не можуть бути виконані одночасно. Тому загальна кількість сигналів складає $6 + 6 = 12$.

Діаграми Ейлера-Венна

Завдання 1. У молодіжному таборі в неділю мали відбутися змагання з легкої атлетики. Напередодні цієї події несподівано прийшов лист з іншого табору:

"Здрастуйте, хлопці! Ми хочемо взяти участь у ваших змаганнях. Наша команда складається з волейболістів, бігунів, стрибунів і металників. Всі



Гурток: «Математика. Позашкільний компонент»

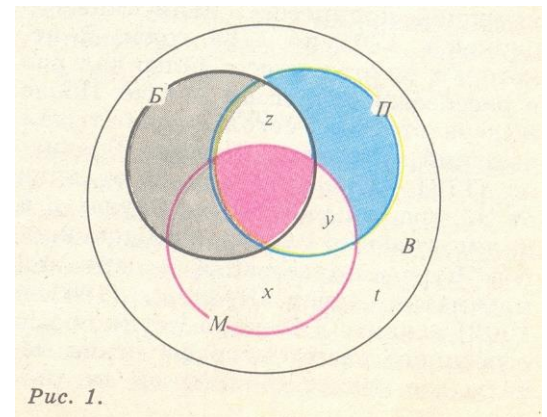
бігуни являються стрибунами, а всі стрибунуни являються або метальниками, або бігунами. Але серед тих метальників, які являються ще й стрибунами, немає бігунів. метальника у нас в два рази менше, ніж стрибунів, і на два менше, ніж бігунів. Бігуни складають третю частину всієї команди, а волейболістів в два рази більше, ніж тих хлопців, які являються одночасно і стрибунами і метальниками.

Ми приїдемо в суботу ввечері. Приготуйте, будь ласка, нічліг для всієї нашої команди, - Ваші друзі "

Звістка про прибуття гостей була зустрінута з захопленням. Утруднення виникло тільки з їх розміщенням на нічліг. Потрібно було знати число очікуваних гостей, але саме про це в листі нічого не було сказано. Тим паче з'ясувати все ж вдалося. Скільки гостей мало приїхати?

Рішення. Розглянемо рис.1.

У ньому велике коло зображує безліч всіх гостей. Кола Б, П, М зображують відповідно безлічі, стрибунів метальників. Неважко зрозуміти і сенс окремих частин цих кіл. Так, наприклад, загальна частина кіл Б і П зображує безліч тих Хлопців, які являються і бігунами, і стрибунами. Серед гостей були ще й волейболісти, але (як впливає з листа) жоден з волейболістів не був ні бігуном, ні стрибунуном, ні метальником.



Значить, вся область поза кіл Б, П, М припадає на частку волейболістів. Тому ця область позначена буквою В. Відомо, що всі бігуни були стрибунами. Це означає, що вся область Б повинна знаходитися всередині П. Щоб ця умова була виконана, треба заштрихувати ту частину Б, яка виходить за межі П, - відзначаючи цим, що заштрихована частина є порожнім безліччю. Відомо також, що всі стрибунуни є або метальниками, або бігунами. Значить, коло П цілком повинен знаходитися всередині області, що складається з Б і М. Тому ту частину П, яка виходить за межі цієї області, слід заштрихувати.

Відомо ще, що серед тих метальників, які були ще й стрибунами, немає бігунів. Значить, із загальної частини кіл М і П треба виключити ту частинку, яка знаходиться всередині Б, - її теж треба заштрихувати.

У не заштриховані осередках запишемо літери x, y, z, t , які будуть позначати число хлопців, що займаються відповідними видами спорту. Число метальників в два рази менше числа стрибунів. Значить, $2(x + y) = y + z$. Число метальників на два менше числа бігунів. Значить, Бігуни становлять $1/3$ всієї команди. Тому $3z = x + y + z + t$. Число волейболістів в два рази більше числа хлопців, які одночасно є стрибунами і метальниками. Значить, $t = 2y$. Вийшла система чотирьох рівнянь з чотирма невідомими. Вирішивши



цю систему, знайдемо: $x = 2$, $y = 6$, $z = 10$, $t = 12$. Отже, кількість гостей дорівнює $2 + 6 + 10 + 12 = 30$

Відповідь: на змагання мала приїхати команда з 30 осіб.

Задача 2. При школі була присадибну ділянку з теплицею. У суботу група хлопців працювала на цій ділянці. Вони ремонтували теплицю і поливали огірки, помідори і капусту. По закінченні роботи потрібні були відомості про число працюючих, але думки хлопців розійшлися і дізнатися нічого не вдалося.

Було встановлено тільки наступне. Хлопці, ремонтували теплицю, не займалися поливанням, а хлопці, поливавши овочі, не брали участь у ремонті теплиці. Ніхто з хлопців не поливав одночасно огірки та капусту. Деякі хлопці поливали помідори і огірки, деякі поливали помідори і капусту, але не було таких хлопців, які поливали б тільки помідори. Огірки поливало 7 осіб, а помідори - 4. Число хлопців, які ремонтували теплицю, було на 2 менше числа хлопців, поливали тільки огірки. Подвоєне число хлопців, поливавших тільки капусту, було на 1 більше потроєного числа тих хлопців, які поливали тільки огірки.

Скільки ж хлопців було в суботу на присадибній ділянці?

Рішення. Намалюємо відповідну діаграму Ейлера-Венна (рис.3).

Кола О, П, К зображують безлічі хлопців, які поливали відповідно огірки, помідори і капусту. Теплицю ремонтували ті і тільки ті хлопці, що не були зайняті на поливанні овочів. Значить, область, розташована поза кіл О, П, К, зображує безліч хлопців, які ремонтували теплицю. Ця область позначена буквою Т.

Ніхто з хлопців не поливав одночасно огірки та капусту. Тому загальну частину кіл О і К треба заштрихувати. Ніхто з хлопців не поливав тільки помідори. Значить, ту частину круга П, яка знаходиться поза кіл О і К, теж потрібно заштрихувати. Чисельні значення незаштриховані осередків позначимо літерами а, b, c, d, t. Буква а, наприклад, означає число хлопців, поливали тільки огірки; буква b позначає число хлопців, поливали і огірки, і помідори. СENS інших букв ясний з малюнка. Тепер, за відомим даним, можна записати рівняння:

$$\begin{cases} a + b = 74; \\ b + c = 4; \\ a = t + 2; \\ 2d = 3a + 1. \end{cases}$$

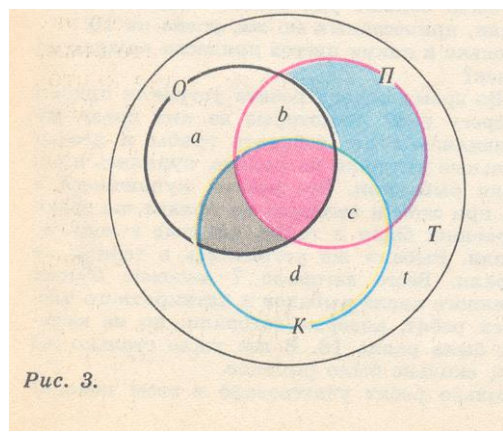


Рис. 3.



Гурток: «Математика. Позашкільний компонент»

Вийшла невизначена система чотирьох рівнянь з п'ятьма невідомими. Щоб вирішити цю систему, прийнемо a за параметр, якому ми самі можемо приписати якесь конкретне значення. Тоді залишиться чотири невідомих. Вирішивши систему відносно цих невідомих, ми, отримаємо наступні співвідношення: $b = 7 - a$, $c = a - 3$, $d = (3a + 1) / 2$, $t = a - 2$. Тепер, здавалося б, надавши параметру a якесь довільне значення, ми зможемо обчислити і відповідні значення невідомих b , c , d , t . А так як вибір значення параметра a начебто зовсім довільний, то ми отримаємо нескінченну безліч рішень. Насправді ж це не так. Справа в тому, що невідомі повинні бути цілими невід'ємними числами. А це означає, що повинні виконуватися такі додаткові умови: $7 - a \geq 0$, $a - 3 \geq 0$, $3a + 1 \geq 0$, $a - 2 \geq 0$, $\frac{3a + 1}{2}$ – ціле число. Остання умова

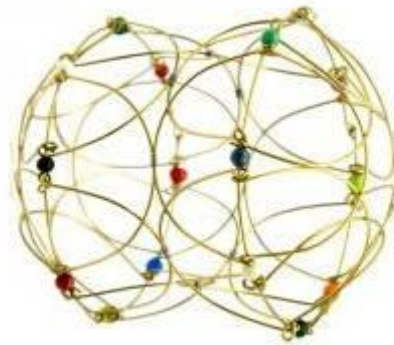
означає, що $3a + 1$ має бути парним числом, а це можливо тільки тоді, коли a - непарне число.

Вирішивши систему наведених вище нерівностей, отримаємо $3 \leq a \leq 7$; a - непарне число. Значить, для параметра a вийшло три значення: 3, 5, 7. Але при $a = 3$ отримаємо $c = 0$, а при $a = 7$ отримаємо $b = 0$, що неможливо, так як b і c позначають число хлопців, поливали крім помідор ще капусту чи огірки, а за умовою ці множини не можуть бути порожніми. Отже, для параметра a залишається одне-єдине значення $a = 5$. Решта невідомі візьмуть тоді такі значення: $b = 2$, $c = 2$, $d = 8$, $t = 3$. Таким чином, загальне число хлопців, які працювали на ділянці, дорівнює $5 + 2 + 2 + 8 + 3 = 20$

Відповідь: на ділянці в суботу працювало 20 хлопців.

Графи

Графи - чудові математичні об'єкти, з їх допомогою можна вирішувати дуже багато різних, зовні не схожих один на одного завдань. У математиці існує цілий розділ - теорія графів, який вивчає графи, їх властивості та застосування. Ми ж обговоримо тільки самі основні поняття, властивості графів і деякі способи вирішення завдань.



Поняття графа

Розглянемо два завдання.

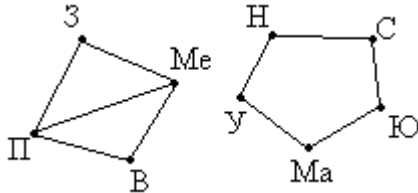
Завдання 1. Між дев'ятьма планетами сонячної системи встановлено космічне повідомлення. Рейсові ракети літають за наступними маршрутами: Земля - Меркурій; Плутон - Венера; Земля - Плутон; Плутон - Меркурій;



Гурток: «Математика. Позашкільний компонент»

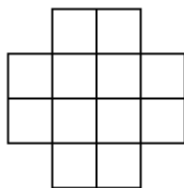
Меркурій - Відні; Уран - Нептун; Нептун - Сатурн; Сатурн - Юпітер; Юпітер - Марс і Марс - Уран. Чи можна долетіти на рейсових ракетах з Землі до Марса?

Рішення: Намалюємо схему умови: планети зобразимо точками, а маршрути ракет - лініями.



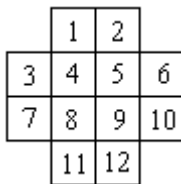
Тепер відразу видно, що долетіти з Землі до Марса не можна.

Завдання 2. Дошка має форму подвійного хреста, який виходить, якщо з квадрата 4x4 прибрати кутові клітини.

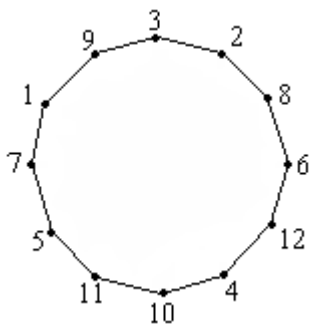


Чи можна обійти її ходом шахового коня і повернутися на вихідну клітку, побувавши на всіх клітинах рівно по одному разу?

Рішення: Занумеруємо послідовно клітини дошки:



А тепер за допомогою малюнка покажемо, що такий обхід таблиці, як зазначено в умові, можливий:

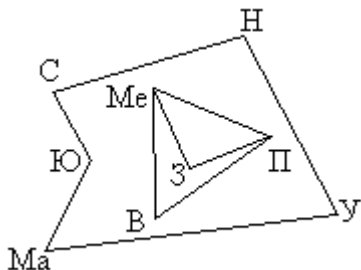


Ми розглянули дві несхожі завдання. Однак вирішення цих двох завдань об'єднує спільна ідея - графічне представлення рішення. При цьому і картинка, намальовані для кожного завдання, виявилися схожими: кожна картинка - це кілька точок, деякі з яких з'єднані лініями.

Такі картинка і називаються графами. Точки при цьому називаються вершинами, а лінії - ребрами графа. Зауважимо, що не кожна картинка такого виду буде називатися графом. Наприклад, якщо вас попросять намалювати в зошиті п'ятикутник, то такий малюнок графом не буде. Будемо називати що малюнок такого виду, як у попередніх завданнях, графом, якщо є якась конкретна задача для якої такий малюнок побудований.



Інше зауваження стосується виду графа. Спробуйте перевірити, що граф для однієї і тієї ж задачі можна намалювати різними способами; і навпаки для різних завдань можна намалювати однакові з вигляду графи. Тут важливо лише те, які вершини з'єднані один з одним, а які - ні. Наприклад, граф для задачі 1 можна намалювати по-іншому:



Такі однакові, але по-різному намальовані графи, називаються ізоморфними.

Ступені вершин і підрахунок числа ребер графа

Напишемо ще одне визначення: Ступенем вершини графа називається кількість виходять з неї ребер. У зв'язку з цим, вершина, що має парну ступінь, називається парною вершиною, відповідно, вершина, що має непарну ступінь, називається непарною вершиною.

З поняттям ступеня вершини пов'язана одна з основних теорем теорії графів - теорема про чесність числа непарних вершин. Доведемо її ми трохи пізніше, а спочатку для ілюстрації розглянемо завдання.

Завдання 3. У місті Маленькому 15 телефонів. Чи можна їх з'єднати проводами так, щоб кожен телефон був з'єднаний рівно з п'ятьма іншими?

Рішення: Припустимо, що таке з'єднання телефонів можливо. Тоді уявімо собі граф, в якому вершини позначають телефони, а ребра - дроти, їх з'єднують. Підрахуємо, скільки всього вийде проводів. До кожного телефону підключено рівно 5 проводів, тобто ступінь кожної вершини нашого графа - 5. Щоб знайти число проводів, треба підсумувати ступеня всіх вершин графа і отриманий результат розділити на 2 (тому кожен дріт має два кінця, то при підсумовуванні ступенів кожен дріт буде взято 2 рази). Але тоді кількість проводів вийде різним. Але це число не є цілим. Значить наше припущення про те, що можна з'єднати кожен телефон рівно з п'ятьма іншими, виявилось невірним.

Відповідь. З'єднати телефони таким чином неможливо.

Теорема: Будь граф містить парне число непарних вершин.

Доказ: Кількість ребер графа дорівнює половині суми ступенів його вершин. Так як кількість ребер має бути цілим числом, то сума ступенів вершин повинна бути парною. А це можливо тільки в тому випадку, якщо граф містить парне число непарних вершин.



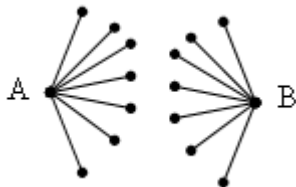
Зв'язність графа

Є ще одне важливе поняття, що відноситься до графів - поняття зв'язності.

Граф називається зв'язковим, якщо з будь-які дві його вершини можна з'єднати шляхом, тобто безперервної послідовністю ребер. Існує цілий ряд завдань, вирішення яких заснована на понятті зв'язності графа.

Задача 4. У країні Сімка 15 міст, кожне з міст з'єднаний дорогами не менше, ніж з сімома іншими. Доведіть, що з кожного міста можна дістатися в будь-який інший.

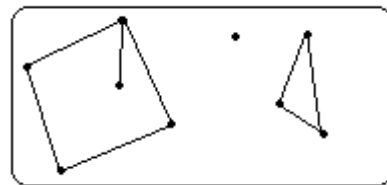
Доказ: Розглянемо два довільних А і В міста і припустимо, що між ними немає шляху. Кожен з них з'єднаний дорогами не менше, ніж з сімома іншими, причому немає такого міста, який був би з'єднаний з обома розглянутими містами (в іншому випадку існував би шлях з А в В). Намалюємо частину графа, відповідну цим містам:



Тепер явно видно, що ми отримали не менше різних 16 міст, що суперечить умові завдання. Значить твердження доведено від супротивного.

Якщо взяти до уваги попереднє визначення, то твердження задачі можна переформулювати і по-іншому: "Довести, що граф доріг країни Сімка зв'язний."

Тепер ви знаєте, як виглядає зв'язний граф. Незв'язний граф має вигляд кількох "шматків", кожен з яких - небудь окрема вершина без ребер, або зв'язний граф. Приклад незв'язного графа ви бачите на малюнку:



Кожен такий окремий шматок називається компонентою зв'язності графа. Кожна компонента зв'язності являє собою зв'язний граф і для неї виконуються всі твердження, які ми довели для зв'язкових графів. Розглянемо приклад завдання, в якій використовується компонента зв'язності:

Задача 5. У тридев'ятому царстві тільки один вид транспорту - килим-літак. Зі столиці виходить 21 ковролін, з міста Далекий - одна, а з усіх інших міст, - по 20. Доведіть, що зі столиці можна долетіти в місто Далекий.

Доказ: Зрозуміло, що якщо намалювати граф ковролін Царства, то він може бути незв'язним. Розглянемо компоненту зв'язності, яка включає в себе столицю Царства. Зі столиці виходить 21 ковролін, а з будь-яких інших міст, крім міста Далекий - по 20, тому, щоб виконувався закон про парному числі

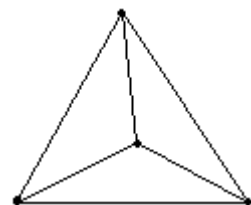


непарних вершин необхідно, щоб і місто Далекий входив в цю ж саму компоненту зв'язності. А так як компонента зв'язності - зв'язний граф, то зі столиці існує шлях по ковзоліну до міста Далекий, що й потрібно було довести.

Графи Ейлера

Ви напевно стикалися з завданнями, в яких потрібно намалювати будь-яку фігуру не відриваючи олівець від паперу і проводячи кожен лінійний елемент тільки один раз. Виявляється, що таке завдання не завжди можна залагодити, тобто існують фігури, які зазначеним способом намалювати не можна. Питання розв'язності таких задач також входить в теорію графів. Вперше його досліджував в 1736 році великий німецький математик Леонард Ейлер, вирішуючи завдання про Кенігсберзьких мостах. Тому графи, які можна намалювати зазначеним способом, називаються ейлеровими графами.

Задача 6. Чи можна намалювати зображений на малюнку граф не відриваючи олівець від паперу і проводячи кожне ребро рівно один раз?



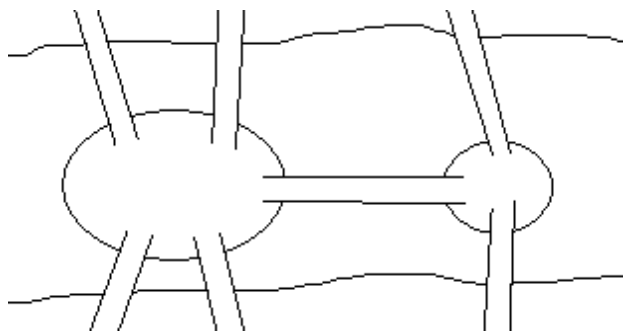
Рішення. Якщо ми будемо малювати граф так, як сказано в умові, то в кожен вершину, крім початкової і кінцевої, ми увійдемо стільки ж разів, скільки вийдемо з неї. Тобто всі вершини графа, окрім двох повинні бути парними. У нашому ж графі є три непарні вершини, тому його не можна намалювати зазначеним в умові способом.

Зараз ми довели теорему про ейлерові графи:

Теорема: Ейлеров граф має мати не більше двох непарних вершин.

І на закінчення - завдання про Кенігсберзькі мости.

Задача 7. На малюнку зображена схема мостів міста Кенігсберга.



Чи можна здійснити прогулянку так, щоб пройти по кожному мосту рівно 1 раз?

Завдання до теми "Графи"

Поняття графа.

1. На квадратній дошці 3x3 розставлені 4 коня так, як показано на рис.1. Чи можна зробивши кілька ходів кіннями, переставити їх в положення, показане на рис.2?

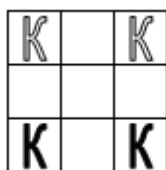


Рис.1

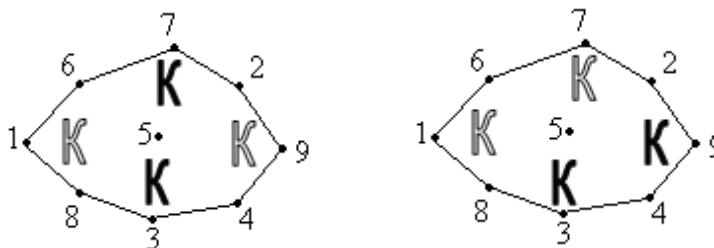


Рис.2

Рішення. Занумеруємо клітини дошки, як показано на малюнку:

1	2	3
4	5	6
7	8	9

Кожній клітці поставимо у відповідність точку на площині і, якщо з однієї клітини можна потрапити в іншу ходом шахового коня, то відповідні точки з'єднаємо лінією. Вихідна і необхідна розстановки коней показані на малюнках:



При будь-якій послідовності ходів кінями порядок їх проходження, очевидно, змінитися не може. Тому переставити коней потрібним чином неможливо.

2. У країні Цифра є 9 міст з назвами 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Мандрівник виявив, що два міста з'єднані авіалінією в тому і тільки в тому випадку, якщо двозначне число, утворене назвами міст, ділиться на 3. Чи можна долетіти по повітрю з міста 1 в місто 9?

Рішення. Поставивши у відповідність кожному місту точку і з'єднавши точки лінією, якщо сума цифр ділиться на 3, отримуємо граф, в якому цифри 3, 5, 9 пов'язані між собою, але не пов'язані з іншими. Значить долетіти з міста 1 в місто 9 можна.

Ступені вершин і підрахунок числа ребер.

3. У державі 100 міст до з кожного міста виходить 4 дороги. Скільки всього доріг в державі.

Рішення. Підрахуємо загальну кількість виходять міст доріг - $100 \cdot 4 = 400$. Однак при такому підрахунку кожна дорога порахована 2 рази - вона



виходить з одного міста і входить в інший. Значить всього доріг в два рази менше, тобто 200.

4. У класі 30 осіб. Чи може бути так, що 9 осіб мають по 3 одного, 11 - по 4 друга, а 10 - по 5 друзів?

Відповідь. Немає (теорема про парність числа непарних вершин).

5. У короля 19 васалів. Чи може виявитися так, що у кожного васала 1, 5 або 9 сусідів?

Відповідь. Ні, не може.

6. Чи може в державі, в якій з кожного міста виходить рівно 3 дороги, бути рівно 100 доріг?

Рішення. Підраховуємо число міст. Число доріг дорівнює числу міст x , помноженому на 3 (число виходять з кожного міста доріг) і розділеному на 2 (див. завдання 3). Тоді $100 = 3x / 2 \Rightarrow 3x = 200$, чого не може бути при натуральному x . Значить 100 доріг в такій державі бути не може.

7. Доведіть, що число людей, що жили будь-коли на Землі і зробили непарне число рукописань, парне.

Доказ безпосередньо випливає з теореми про парність числа непарних вершин графа.

Зв'язність

8. У країні з кожного міста виходить 100 доріг і з кожного міста можна дістатися до будь-якого іншого. Одну дорогу закрили на ремонт. Доведіть, що і тепер з будь-якого міста можна дістатися до будь-якого іншого.

Доказ. Розглянемо компоненту зв'язності, до якої входить один з міст, дорогу між якими закрили. По теоремі про парність числа непарних вершин у неї входить і друге місто. А значить і раніше можна знайти маршрут і дістатися з одного з цих міст в інший.

Графи Ейлера

9. Є група островів, з'єднаних мостами так, що від кожного острова можна дістатися до будь-якого іншого. Турист обійшов всі острови, пройшовши по кожному мосту рівно 1 раз. На острові триразово він побував тричі. Скільки мостів веде з триразово, якщо турист

а) ні з нього почав і не на ньому закінчив?

б) з нього почав, але не на ньому закінчив?

в) з нього почав і на ньому закінчив?

10. На малюнку зображений парк, розділений на кілька частин парканами. Чи можна прогулятися по парку і його околицях так, щоб перелізти через кожен паркан рівно 1 раз?

