УПРАВЛІННЯ ОСВІТИ І НАУКИ
МИКОЛАЇВСЬКОЇ ОБЛДЕРЖАДМІНІСТРАЦІЇ
МИКОЛАЇВСЬКИЙ ОБЛАСНИЙ ЦЕНТР НАУКОВО-ТЕХНІЧНОЇ ТВОРЧОСТІ
УЧНІВСЬКОЇ МОЛОДІ
МИКОЛАЇВСЬКЕ ТЕРИТОРІАЛЬНЕ ВІДДІЛЕННЯ МАЛОЇ АКАДЕМІЇ НАУК УКРАЇНИ
Секція математики

Гурток
“ Математика ”.
Позашкільний компонент
1 рівень
для слухачів МАН (8-9 клас)

Конспект відкритого заняття
за темою
„ Матриці другого порядку та їх застосування ”

Керівник гуртка:
вчитель математики
Гозян Наталія Іванівна

Зміст

Вступ (пояснювальна записка)

Однією з форм роботи з інтелектуально обдарованою молоддю є Мала академія наук України (МАН). МАН – це структурна складова системи позашкільної освіти, яка сприяє виявленню здібностей, обдарувань, і самовизначенню та реалізації особистості засобами залучення до пошукової, експериментальної, дослідницької роботи в різних галузях науки і техніки, забезпечує її творчий, інтелектуальний, духовний розвиток, професійну орієнтацію, підготовку до майбутньої професійної та громадської діяльності.

Мета МАН – поглиблення науково-практичних знань із галузевих наук у секціях і наукових товариствах, подальше зміцнення наукових зв’язків між шкільною молоддю і науковими установами.

Педагогічний процес у МАН має свої особливості, які відрізняють його від звичайних уроків у школі. І перш за все це те, що плани й програми наукових гуртків охоплюють такі галузі знань і практичної діяльності, які виходять за межі уроку, враховуючи індивідуальні інтереси та творчий потенціал конкретної дитини.

Одним із напрямків формування особистості школяра як творчої особистості, розвитку позитивних якостей кожного учня, його потенційних можливостей є впровадження позашкільного компоненту в рамках гуртка малої академії наук.

Нова організація навчальної діяльності учнів, яка ґрунтується на запровадженні позашкільного компоненту в рамках МАН, змінює джерела навчальних відомостей, і, в першу чергу, навчальну книгу. Крім традиційних друкованих підручників, у навчанні математики ширше застосовуються підручники нового типу: програмовані, мультимедійні, електронні.

У процесі підготовки до занять гуртківці навчаються та закріплюють вміння й навички в підборі матеріалу, учаться аналізувати, установлювати причинно-наслідкові зв'язки. У процесі дискусії учні вчаться висловлювати свої думки, відстоювати свою точку зору, вислуховувати міркування своїх товаришів.

Ще Блез Паскаль зазначав, що предмет математики є таким серйозним, що зробити його цікавим не тільки можна, а й треба. Тому заняття гуртка є доцільним засобом навчання і ефективним помічником учителеві у вирішенні проблем викладання математики.

1. Тема та мета заняття.

1.1. Тема заняття

Матриці другого порядку. Основні типи матриць. Дії над матрицями та їх властивості. Застосування матриць до розв’язання систем лінійних рівнянь та їх геометрична інтерпретація. Лінійні перетворення і матриці. Матриці в економіці.

1.2. Дидактична мета заняття.

Ввести поняття матриці та дії над матрицями. Сформулювати основні властивості дій над матрицями та показати їх практичне застосування в геометрії та економіці.

Мотивація навчання:

- розвиток математичних здібностей учнів;
- формування алгоритмічного мислення та високої логічної культури;
- вироблення навичок самостійної роботи при розв’язуванні задач;
- перенесення засвоєних знань на розв’язування складних та нестандартних задач;
- якісної підготовки до успішної участі в обласному конкурсі-захисті робіт слухачів та дійсних членів МАН.

Після вивчення матеріалу заняття гуртківці повинні
знати:

- математичні факти;
- основні алгоритми та методи розв’язування алгебраїчних та геометричних задач з необхідним обґрунтуванням ;

вміти:

- оволодівати необхідною інформацією для розуміння постановки математичної задачі;
- проектувати і здійснювати алгоритмічну та евристичну діяльність на математичному матеріалі;
- розв’язувати завдання в знайомих ситуаціях із достатнім поясненням;
- використовувати набуті знання і вміння;
- узагальнювати й систематизувати набуті знання;
- самостійно розв’язувати задачі і вправи;

1.2. Тип заняття.

Заняття засвоєння нових знань.

1.3. Форма проведення заняття.

Заняття поділяється на дві частини - теоретичну та практичну. Теоретична частина проводиться у вигляді лекції. Практична частина у вигляді розв’язання низки вправ за допомогою вчителя та самостійно у вигляді контрольного тесту (тест-контроль).

1.4. Основні поняття.

Основні поняття, яки вводяться на занятті: матриця, типи матриць - квадратна, прямокутна, одинична, нульова діагональна; обернена матриця; система лінійних рівнянь двох змінних, розв’язки системи лінійних рівнянь двох змінних; лінійні перетворення.

2. Хід заняття.

2.1. План проведення лекції (теоретична частина заняття):

1. Обґрунтування необхідності введення поняття матриці.
2. Означення матриці. Типи матриць.
3. Дії над матрицями та їх властивості.
4. Система лінійних рівнянь двох змінних означення .
5. Розв’язки системи лінійних рівнянь двох змінних та їх геометрична інтерпретація.
6. Лінійні перетворення і матриці.
7. Алгебра матриць в економічних задачах.

2.1.1. Обґрунтування необхідності введення поняття матриці

Матриця це узагальнення поняття числа, а саме матрицю можна розглядати, як таблицю чисел. Якщо числа таблиці є невід’ємнім то так звані невід’ємні матриці відіграють важливу роль в математичних моделях економіки, біології, теорії ймовірностей, тощо. В економічних задачах матриці використовуються як засіб збереження інформації в табличній формі.

Приклад : матриця реалізації.

Продаж товарів двох видів (α, β) здійснюють два магазини (1, 2). Обсяги реалізації цих товарів (в кількості шт.) кожним магазином представлено у вигляді матриць (таблиць) на початку доби (***A***) та на при кінці доби (***B***)

$$\begin{array}{lcc} & \textit{товар типу } \alpha & \textit{товар типу } \beta \\ \textit{магазин №1} & \otimes & * \\ \textit{магазин №2} & \oplus & \propto \end{array}$$

	товар типу α	*товар типу β*
магазин №1	320	60
магазин №2	200	90

$$A = \begin{pmatrix} 320 & 60 \\ 200 & 90 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 220 & 30 \\ 180 & 30 \end{pmatrix}$$

де в стовпчиках вказано кількість товару (α, β), а в рядках - кількість товару в кожному магазині за відповідний період. Потрібно з’ясувати, яку кількість товару було продано за добу, тобто записати матрицю продаж.

Зрозуміло, що необхідно знайти різниці матриць ***A-B***:

$$A - B = \begin{pmatrix} 320 & 60 \\ 200 & 90 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 220 & 30 \\ 180 & 30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 100 & 30 \\ 20 & 60 \end{pmatrix}$$

Аналізуючи елементи матриці ***A-B*** , легко пересвідчитися, що перший магазин реалізував товар типу α більше ніж другий (100 проти 20), а другий продав товар типу β більше ніж перший (60 проти 30).

2.1.2. Означення матриці. Типи матриць

Поняття матриці вперше ввели англійські математики У. Гамільтон і Д. Келі.

Означення. Матриця розмірів (mxn) – це прямокутна таблиця чисел з m рядків та n стовпців.

Позначається матриця так:

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \text{ або } A=\begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{Vmatrix}$$

Для 2х2 матриці $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$

де a_{ij} — елементи матриці, причому індекс *i* в елементі a_{ij} означає номер рядка, а індекс *j*— номер стовпця, на перетині яких стоїть даний елемент.

Наприклад: $A=\begin{pmatrix} 15 & -3 \\ 0 & 25 \end{pmatrix}$,

$a_{12}=-3$, $a_{21}=0$, $a_{11}=15$, $a_{22}=25$

Добуток числа рядків *m* на число стовпців *n* називають розмірністю матриці і позначають $m\times n$. Якщо хочуть вказати розмір $m\times n$ матриці А, то пишуть $A_{m\times n}$.

Матриця, в якої число рядків дорівнює числу стовпців, називається ***квадратною***. Кількість рядків (стовпців) квадратної матриці називається її порядком.

Наприклад ми сьогодні розглянемо матриці другого порядку, тобто матриці розмірність 2×2.

Дві матриці $A_{m\times n}=(a_{ij})$ та $B_{m\times n}=(b_{ij})$ називаються рівними, якщо вони однакових розмірів і мають рівні відповідні елементи: $(a_{ij})=(b_{ij})$.

$$A=\begin{pmatrix} 15 & -3 \\ 0 & 25 \end{pmatrix},\ B=\begin{pmatrix} 15 & -3 \\ 0 & 25 \end{pmatrix} \Leftrightarrow A=B.$$

Нульовою називається матриця, у якої всі елементи дорівнюють нулю. Позначається така матриця буквою *O*.

$$O=\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Квадратна матриця називається діагональною, якщо всі її елементи, крім тих, що знаходяться на головній діагоналі, дорівнюють нулю.

$$D = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = diag(2{,}3)$$

Діагональна матриця, у якої кожен елемент головної діагоналі дорівнює одиниці, називається одиничною і позначається буквою Е. Наприклад, одинична матриця другого порядку має вигляд $E = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Нехай A — квадратна матриця. Матриця A^{-1} називається оберненою до матриці А, якщо виконується умова

$A\,A^{-1} = A^{-1}A = E$.

2.1.3. Дії над матрицями та їх властивості.

З матрицями можна здійснювати такі операції:

1. Множити на число

<u>**Приклад:**</u> $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}, p = \frac{1}{2}, тоді \quad pA = \begin{pmatrix} 1 & \frac{3}{2} \\ -\frac{5}{2} & 3 \end{pmatrix}$

2. Додавати матриці однакових розмірів:

Операція додавання матриць вводиться тільки для матриць однакового розміру. Сумою C = A + B двох матриць $Am\times n$ — (aij) і $Bm\times n$ = (bij) називається матриця $Cm\times n$= (cij)=(aij+bij).

<u>**Приклад:**</u> $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}, тоді \quad A + B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ 6 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 6 \\ 8 & 10 \end{pmatrix}$

Справедливі такі властивості операцій:

а) A+ B = B + A — комутативність відносно додавання матриць; (переместительный закон)

б) A + (B + C) — (A + B)+C — асоціативність відносно додавання матриць; (сочитательный закон)

в) A + O = A; A - A = O — роль нульової матриці в діях над матрицями така, як і числа нуль в діях над числами;

г) α(βA) = (αβ) A — асоціативність відносно множення чисел;

д) α(A + B) = αA +αB — дистрибутивність множення на число відносно додавання матриць; (розподільний закон)

е) (α + β) A — αA + βA — дистрибутивність множення на матрицю відносно додавання чисел.

3. Множення матриць:

<u>Приклад:</u>

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \text{ тоді} \qquad AB = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 18 & 11 \\ 25 & 16 \end{pmatrix}$$

Добутком матриці A розмірів $m \times k$ та матриці B розмірів $k \times n$ називається матриця C розмірів $m \times n$, яка позначається AB. Елемент c_{ij} цієї матриці – це сума попарних добутків елементів *i*-го рядка матриці A та елементів *j*-го рядка матриці B, а саме: $c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ir}b_{rj}$ правило „рядок на стовбчик”.

i- рядок матриці *A*

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ir}b_{rj}$$

j*- стовпчик матриці *B

Якщо A та B квадратні матриці однакового порядку, то їх завжди можна перемножити.

Справедливі такі властивості операцій множення матриць:

а) (AB) C = A (BC); асоціативність множення матриць.

б) (αA) B = A (αB) = α(AB);

в) (A + B) C = AC + BC; дистрибутивність множення (лівосторонній закон)

г) C (A + B) = CA + CB; дистрибутивність множення (правосторонній закон)

д) A • O = O • A = O; е) AE = EA = A;

е) в загальному випадку $A \cdot B \neq B \cdot A$; - не комутативність множення. Перше зустрічаємося з не комутативними математичними об’єктами. То б то зараз коли вас будуть питати, чи при множенні множники можна змінювати місцями? Ви дасте відповідь- ні.

2.1.4. Система лінійних рівнянь двох змінних (означення) .

Основні означення

Системою m лінійних рівнянь з n невідомими x_1 x_2, ..., x_n називається система виду

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1; \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2; \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots a_{mn}x_n = b_m. \end{cases} \quad (*)$$

Числа a_{ij}, $i = 1, 2, \ldots. m$; $j = 1, 2, \ldots, n$ біля невідомих називаються коефіцієнтами, а числа b_i — вільними членами системи (*).

Система рівнянь (*) називається однорідною, якщо всі вільні члени дорівнюють нулю, і неоднорідною, якщо хоч один з них відмінний від нуля.

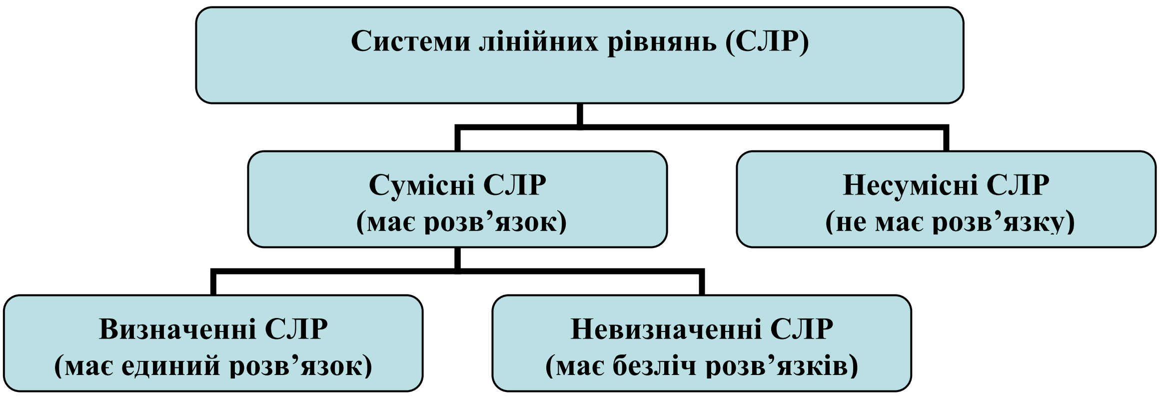
Множина чисел a1, a2, ..., an називається впорядкованою, якщо вказано порядок слідування цих чисел, тобто вказано, яке з них є першим, яке другим, яке третім і т. д. Наприклад, якщо впорядкована трійка чисел, то в запису a, b, c число a вважається першим, b— другим, c — третім, в запису b, a, c першим е число b, другим — число a і третім — число c.

Упорядкований набір n чисел ($x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$) називається розв'язком системи (*), якщо при підстановці цих чисел замість невідомих x_1, x_2, ..., x_n усі рівняння системи перетворюються в тотожності.

Система рівнянь називається сумісною, якщо вона має хоча б один розв'язок, і несумісною, якщо вона не має жодного розв'язку.

Сумісна система називається визначеною, якщо вона має єдиний розв'язок, тобто існує тільки один набір n чисел $x_1^0, x_2^0, \ldots, x_n^0$, який перетворює всі рівняння системи (*) в тотожності.

Сумісна система називається невизначеною, якщо вона має більше, ніж один розв'язок.



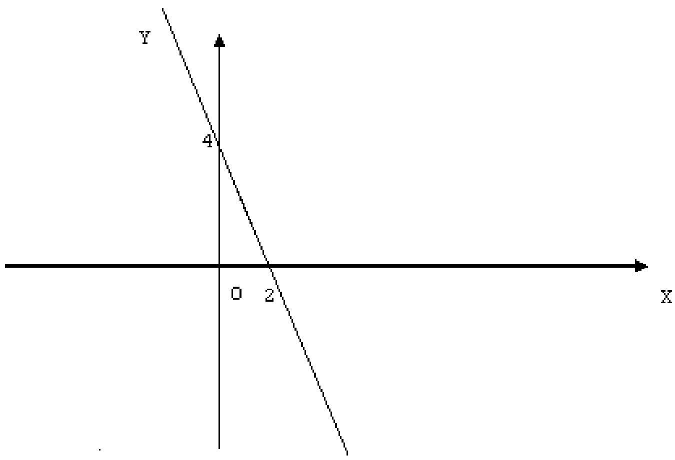
2.1.5. Розв’язки системи лінійних рівнянь двох змінних та їх геометрична інтерпретація.

Розглянемо лінійне рівняння

$$2x + y = 4 \Rightarrow y = -2x + 4$$

з геометричної точки зору це рівняння прямої. Побудуємо її за двома точками

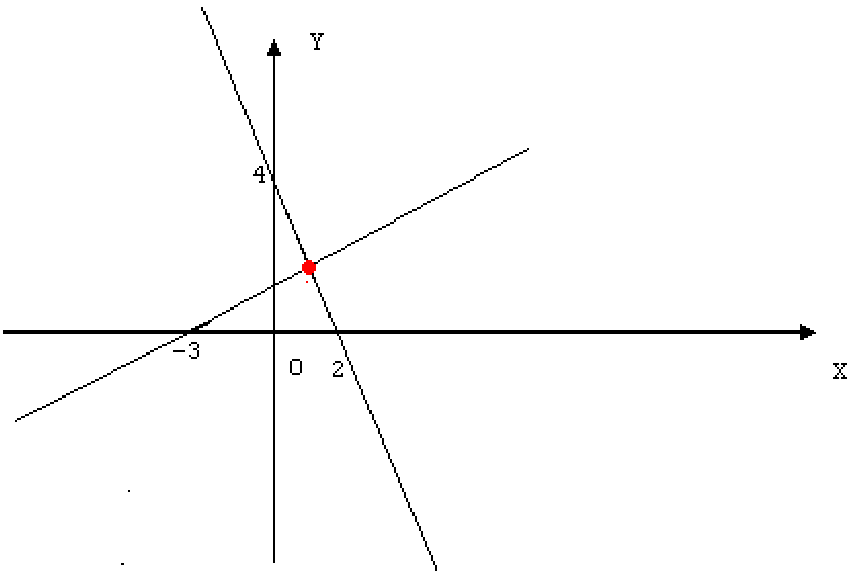
x	0	2
y	4	0



Розв’язками рівняння є безліч упорядкованих пар (x,y) точок прямої.
Розглянемо систему

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ x - 2y = 3. \end{cases} \quad (1)$$

з геометричної точки зору це рівняння двох прямих. Побудуємо їх.

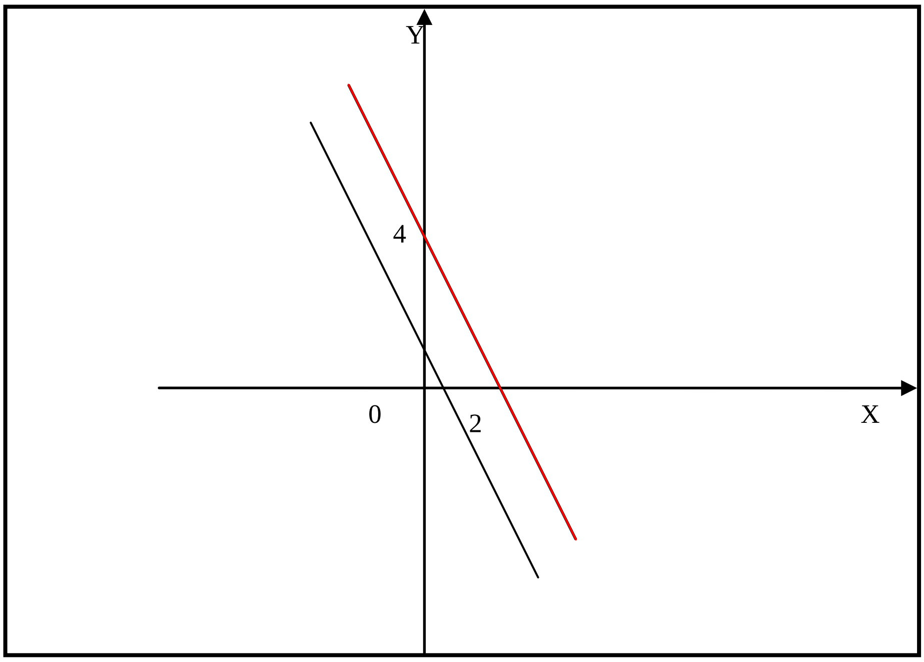


Перетин прямих дає єдиний розв’язок даної системи (1,2)

Розглянемо систему

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 4x + 2y = 3. \end{cases} \quad (2)$$

з геометричної точки зору це рівняння двох прямих. Побудуємо їх.

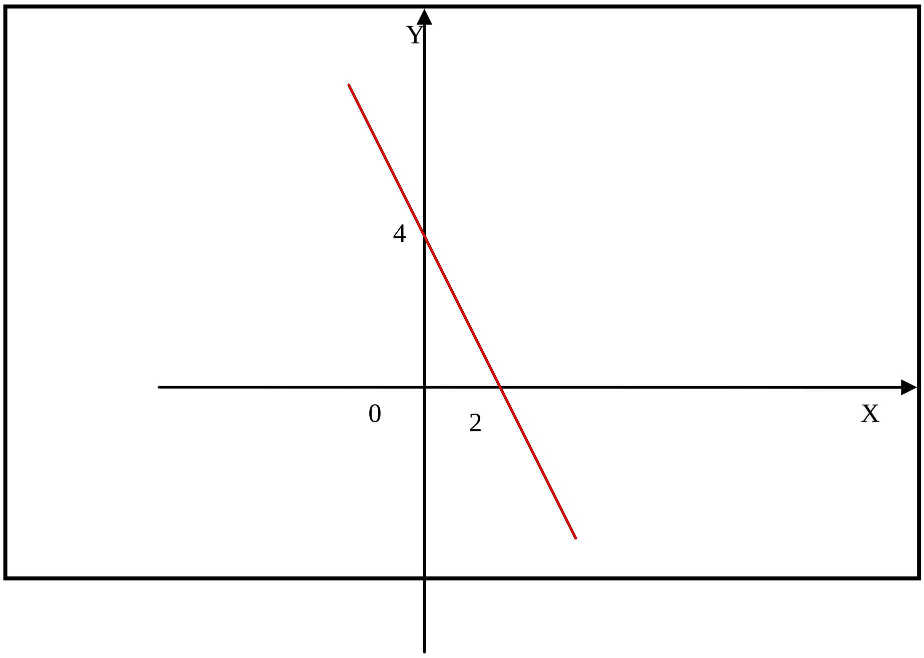


Прямі не перетинаються - отже немає розв’язку

Розглянемо систему

$$\begin{cases} 2x + y = 4, \\ 4x + 2y = 8. \end{cases} \quad (3)$$

з геометричної точки зору це рівняння двох прямих, які збігаються. Побудуємо їх.



Отже система має безліч розв’язків.

Розв'язування систем лінійних рівнянь за формулами Крамера

Нехай задано систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими x і y:

$$\begin{cases} a_{11}x + a_{12}y = b_1; \\ a_{21}x + a_{22}y = b_2. \end{cases} \quad (\ )$$

Виконаємо такі елементарні перетворення системи ( ): спочатку помножимо перше рівняння на a22. Друге — на —a12, а потім складемо їх; після цього перше рівняння помножимо на a21, а друге — на —a11 і складемо їх. Дістанемо систему

$$\begin{cases} x(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{112}) = b_1a_{22} - b_2a_{12}; \\ y(a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}) = b_2a_{11} - b_1a_{21}. \end{cases}$$

Систему ( ) можна записати за допомогою визначників:

$$\begin{cases} x \cdot \Delta = \Delta_x; \\ y \cdot \Delta = \Delta_y, \end{cases}$$

де

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_x = \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} \\ b_2 & a_{22} \end{vmatrix}; \quad \Delta_y = \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 \\ a_{21} & b_2 \end{vmatrix}.$$

Визначник Δ, складений з коефіцієнтів системи ( ), називається визначником системи. Визначники Δy та Δx утворюються з визначника Δ відповідно заміною стовпців при невідомих x та y вільними членами.

2.1.6. Лінійні перетворення і матриці.

Лінійні перетворення і матриці

Нехай на площині *xy* дано точку *M* (*x, y*). перетворення симетрії відносно осі х переводить її в точку M_1 (x_1, y_1), де $x_1 = x$, $y_1 = -y$, а перетворення симетрії відносно прямої $y = x$ у точку M_2 (x_2, y_2), де $x_2 = y$, $y_2 = x$. Геометрія відносно центра *O* з коефіцієнтом *k* переводить точку *M* в точку M_3 (x_3, y_3), де $x_3 = kx$, $y_3 = ky$. Ми навели приклади відомих вам з шкільного курсу так званих лінійних перетворень площини. У загальному випадку при цих перетвореннях точка *M (x, y)* переходить у точку *M` (x`, y`)*, де

$$\begin{cases} x' = ax + by \\ y' = cx + dy \end{cases} \qquad (1)$$

(*a*, *b*, *c*, *d* – довільні дійсні числа).

Лінійному перетворенню (1) ставлять у відповідність таблицю $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, яку називають *матрицею лінійного перетворення.*

Ця матриця має два рядки і два стовпці, тому вона,згідно з наведеним вище означенням, є квадратною матрицею другого порядку. Зокрема, у розглянутих прикладах матриці лінійних перетворень мають, відповідно, вигляд $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{pmatrix}$.

Зауважимо також, що довільна матриця другого порядку визначає певне лінійне перетворення точок площини. Наприклад, матриці $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ відповідає перетворення

$$\begin{cases} x' = x\cos\alpha - y\sin\alpha, \\ y' = x\sin\alpha + y\cos\alpha \end{cases}$$

Дві матриці А1 = $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ і $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$ вважаються рівними, якщо збігаються їх відповідні елементи, тобто $a_1 = a_2$, $b_1 = b_2$, $c_1 = c_2$, $d_1 = d_2$. Легко переконатися в тому, що рівні матриці задають одне й те саме перетворення.

Доведемо, що *послідовне виконання двох лінійних перетворень знову є лінійним перетворенням*.

Нехай слідом за перетворенням

$$\begin{cases} x_1 = a_1x + b_1y \\ y_1 = c_1x + d_1y \end{cases}$$

виконується лінійне перетворення

$$\begin{cases} x_2 = a_2x_1 + b_2y_1 \\ y_2 = c_2x_1 + d_2y_1 \end{cases}$$

Тоді

$X_2 = a_2\,(a_1x + b_1y) + b_2\,(c_1x + d_1y) =$

$=(a_1a_2 + c_1b_2)\,x + (b_1a_2 + d_1b_2)\,y,$

$y_2 = c_2\,(a_1x + b_1y) + d_2\,(c_1x + d_1y) =$

= (a₁c₂ + c₁ d₂) x + (b₁c₂ + d₁d₂) y.

Отже, у результаті послідовного виконання двох лінійних перетворень, матриці яких відповідно $A_1 = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ c_1 & d_1 \end{pmatrix}$ і $A_2 = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ c_2 & d_2 \end{pmatrix}$,*дістаємо знову* лінійне перетворення з матрицею

$$B = \begin{pmatrix} a_1a_2 + c_1b_2 & b_1a_2 + d_1b_2 \\ a_1c_2 + c_1d_2 & b_1c_2 + d_1d_2 \end{pmatrix}$$

Матрицю B *називають добутком матриць* A_2 і A_1 і позначають B= $A_1 * A_2$.

Зауважимо, що елемент i-того рядка і k-того стовпця (i=1, 2, k=1,2)матриці B дорівнює сумі добутків елементів *i-того рядка матриці* A_2 і відповідних елементів *k-того стовпця* A_1, наприклад :

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2\cdot 1 + (-1)(-3) & 2\cdot 2 + (-1)4 \\ 3\cdot 1 + 0(-3) & 3\cdot 2 + 0\cdot 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}.$$

Очевидно, що $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\alpha & \cos\alpha \\ \cos\alpha & -\sin\alpha \end{pmatrix}$,

Тому остання матриця відповідає лінійному перетворенню, яке дістаємо в результаті послідовного виконання повороту точок навколо початку координат на кут α і симетрії відносно прямої y=x.

Розглянуте правило множення квадратних матриць зручно подати як означення добутку квадратної матриці $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ і матриці – стовпця $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, а саме : $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ax + by \\ cx + dy \end{pmatrix}$.

Аналогічно вводимо добуток матриці-рядка (x, y)і квадратної матриці або матриці-стовпця:

$$(x, y)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (xa + yc, xb + yd); \quad (x, y)\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = (xa + xb)$$

Матриця $(xa + yb)$ототожнюється з числом $xa + yb$.

Отже, лінійне перетворення (1) можна записати в матричному вигляді : $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

(2)

Розглянемо деякі властивості множення матриць. Насамперед зауважимо, що множення матриць, взагалі кажучи, не підлягає комутативному закону.

Справді, $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 4 \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -1 \\ 6 & 3 \end{pmatrix}$. А добуток цих самих матриць у зворотному порядку, як було показано вище, дорівнює $\begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 3 & 6 \end{pmatrix}$.

Множення матриць асоціативне, тобто для довільних матриць $A, B, C (AB)C = A(BC)$. Пропонуємо перевірити це безпосереднім обчисленням.

2.1.7.Алгебра матриць в економічних задачах.

Приклад 1.

Сезонний продаж товарів трьох видів (α, β, γ) здійснюють три магазини (12 3). Обсяги реалізації цих товарів (в грош. од.) кожним магазином представлено у вигляді матриць

$$A = \begin{bmatrix} 320 & 60 & 220 \\ 200 & 60 & 240 \\ 100 & 60 & 140 \\ 120 & 60 & 100 \end{bmatrix}; \mathrm{B} = \begin{bmatrix} 380 & 70 & 200 \\ 320 & 80 & 260 \\ 180 & 80 & 220 \\ 200 & 60 & 100 \end{bmatrix}; \mathrm{C} = \begin{bmatrix} 220 & 20 & 80 \\ 180 & 30 & 60 \\ 140 & 25 & 100 \\ 90 & 30 & 120 \end{bmatrix},$$

де в рядках вказано суми, отримані кожним магазином за відповідний сезон (зима, весна, літо, осінь), а в стовпчиках – суми, отримані за продаж відповідного товару (α, β, γ) . Потрібно: 1) перевірити, що суми реалізації товарів першого і третього магазинів разом більші, ніж другого; 2) записати у вигляді матриці сукупні суми реалізації товарів трьома магазинами.

Розв'язування.

Знаходимо обсяг реалізації товарів кожного виду першим і третім магазинами. Він дорівнює сумі A+C:

$$\mathrm{A+C} = \begin{bmatrix} 320 & 60 & 220 \\ 200 & 60 & 240 \\ 100 & 60 & 140 \\ 120 & 60 & 100 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 220 & 20 & 80 \\ 180 & 30 & 60 \\ 140 & 25 & 100 \\ 90 & 30 & 120 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 540 & 80 & 300 \\ 380 & 90 & 300 \\ 240 & 85 & 240 \\ 210 & 90 & 220 \end{bmatrix}.$$

Порівнюючи елементи матриці A+C з відповідними елементами матриці B, легко пересвідчитися, що у кожному сезоні перший і третій магазини разом продали кожному виду товарів більше, ніж другий магазин. Щоб записати у вигляді матриці дані про сукупний продаж магазинів, знайдемо матрицю A+B+C:

$$\mathrm{A+B+C} = \begin{bmatrix} 540 & 80 & 300 \\ 380 & 90 & 300 \\ 240 & 85 & 240 \\ 210 & 90 & 220 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 380 & 70 & 200 \\ 320 & 80 & 260 \\ 180 & 80 & 220 \\ 200 & 60 & 100 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 920 & 150 & 500 \\ 700 & 170 & 560 \\ 420 & 165 & 460 \\ 410 & 150 & 320 \end{bmatrix}.$$

Приклад 2.

Випуск готової продукції двох підприємств включає два види виробів (α, β). Для їх виробництва використовуються два різні типи сировини (I, II). Дані щоденної продуктивності підприємств з кожного виробу (число виробів за дань) і витрат сировини на одиницю виробу (кг/шт.), а також число днів роботи кожного підприємства і вартість у гривнях 1 кг сировини кожного типу, наведено в таблиці.

Вироб и	**Продуктивність підприємств шт. /день**		**Витрати сировини, кг/шт.**	
	1	2	I	II
α	6	10	5	3
β	4	3	10	4
	Час роботи підприємств (дн.)		**Ціна сировини (грн./кг)**	
	100	200	170	30

Потрібно визначити:

а) сумарну продуктивність кожного підприємства по кожному з виробів за весь виробничий період);

б) потреби кожного підприємства у різних типах сировини;

в) розміри кредитування підприємств для закупівлі сировини.

Розв'язування.

Розглянемо матрицю А, що характеризує продуктивність підприємств, матрицю В – витрат сировини і С – матрицю цін, тоді

Продуктивність підприємств Вид виробу

$$A = \begin{array}{c|l} \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} & \begin{matrix} \alpha \\ \beta \end{matrix} \end{array} \text{Вид виробу } B = \begin{array}{c|l} \begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix} & \\ \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} & \begin{matrix} I \\ II \end{matrix} \end{array} \text{ Вид сировини}$$

С= (30 20).

а) Кожний стовпчик матриці А відповідає денній продуктивності окремого підприємства з кожного виду продукції. Щоб отримати річну продуктивність j-го підприємства (j=1,2), потрібно помножити j-тий стовпець матриці А на кількість робочих днів цього підприємства. Час роботи кожного з підприємств запишемо у вигляді діагональної матриці

$$T = \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 200 \end{pmatrix}$$

Тоді загальна продуктивність за виробничий період є добуток матриць $A^{\cdot}T$:

$$AT = \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 & 2000 \\ 400 & 600 \end{pmatrix}$$

Підприємства вироби

б) Витрати сировини кожного підприємства є добуток $B^{\cdot}(AT)$:

$$B^{\cdot}AT = \begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 6 & 10 \\ 4 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 100 & 0 \\ 0 & 200 \end{pmatrix} =$$

$$\begin{pmatrix} 5 & 10 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 600 & 2000 \\ 400 & 600 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7000 & 16000 \\ 3400 & 8400 \end{pmatrix}$$

в) Вартість річного запасу сировини одержуємо як добуток матриці цін С на матрицю витрат В(АТ):

$$D = C^{\cdot}(B^{\cdot}(AT)) = (30\ 20) \begin{pmatrix} 7000 & 16000 \\ 3400 & 8400 \end{pmatrix} = (274000\ 648000).$$

Отже, величини кредитування j-го підприємства на закупівлю сировини визначаються компонентами матриці D.

Економічні задачі, що зводяться до систем лінійних рівнянь.

Приклад 3.

Для випуску виробів трьох видів (α, β) підприємство використовує сировину 2-х типів (S_1, S_2,). Норми витрат кожного з типів сировини на один виріб і обсяг витрат сировини за один день задано таблицею:

Вид сировини	Норми витрат сировини на один виріб, ум. од.	Витрати

	α	β	сировини за день, ум. од
S_1	9	3	1500
S_2	7	1	900

Знайти щоденний обсяг випуску кожного виду виробів.

Розв'язування.

Припустимо, підприємство щодня виробляє x_1 одиниць виробів виду α, x_2 одиниць – виду β . Тоді, відповідно з витратами

Сировини кожного виду, маємо систему: $\begin{cases} 9x_1 + 3x_2 = 1500, \\ 7x_1 + x_2 = 900, \end{cases}$

Розв'язавши цю систему, знайдено $x_1=100$, $x_2=200$. Це означає, що підприємство щоденно виробляє 100 виробів виду α і 200 виробів виду β .

Приклад 4.

Два заводи виготовляють апарати для двох підприємство. Підприємствам необхідно отримати 120 і 80 апаратів відповідно. Перший завод випустив 150 апаратів, а другий – 50. Витрати на перевезення апаратів із заводів кожного підприємства такі:

Завод	Витрати на перевезення, грош.од.	
	1	2
1	10	20
2	5	25

Мінімальні витрати на перевезення становлять 2850 грош.од. Знайти оптимальний план перевезення апаратів.

Розв'язування.

Позначимо x_{ij} – кількість апаратів, що надходять з i-го заводу до j-го підприємства. Тоді можемо скласти таку систему:

$$\begin{cases} x_{11} + x_{12} = 150, \\ x_{12} + x_{22} = 50, \\ x_{11} + x_{21} = 120, \\ x_{12} \quad x_{22} = 80, \\ 10x_{11} + 20x_{12} + 5x_{21} + 25x_{22} = 2850 \end{cases}$$

Розв'язавши систему, наприклад, методом Гаусса, знайдемо x_{11}=100, x_{12}=50, x_{21}=20, x_{22}=30.

2.2. План проведення практичної частини заняття:

1. Дії над матрицями та їх властивості.
2. Розв’язки системи лінійних рівнянь двох змінних.

2.2.1. Дії над матрицями та їх властивості.

Приклад №1.

Додати матриці:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$$

Розв’язання:

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 & -8 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3+4 & 4-8 \\ 7+0 & -6+3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -4 \\ 7 & -3 \end{pmatrix}$$

Приклад №2

Обчислити $f(A)$, якщо $f(x) = x^2 - 2x + 1$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$$

Розв'язання

$$f(A) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} - 2\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -3 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 & -5 \\ -15 & 12 \end{pmatrix} +$$

$$+ \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 6 & -6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -9 & 7 \end{pmatrix}$$

Приклад №3 Обчислити добуток матриць $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix}$

Розв'язання Множення матриць другого порядку.

$$\begin{pmatrix} r & s \\ t & u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} e & g \\ f & h \end{pmatrix} \qquad \begin{matrix} r = ae + bf & t = ce + df \\ s = ag + bh & u = cg + dh \end{matrix}$$

Приклад №4 Матриці A і B називаються *переставними*, якщо $AB = BA$. Знайти всі матриці, переставні з матрицями:

а) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} 7 & -3 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$.

Відповідь. а) $\begin{pmatrix} \alpha & 2\beta \\ 3\beta & \alpha+3\beta \end{pmatrix}$; б) $\begin{pmatrix} \alpha & 3\beta \\ -5\beta & \alpha+9\beta \end{pmatrix}$; в) $\begin{pmatrix} \alpha & \beta & \gamma \\ a & \alpha & \beta \\ 0 & 0 & \alpha \end{pmatrix}$, де α, β, γ — будь-які числа.

2.2.2. Розв’язки системи лінійних рівнянь двох змінних.

Позначимо через $\mathbf{x}$ вектор-стовпчик висоти n, i-тою координатою якого є невідоме x_i, тобто $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$. Тоді за формулою $(A\mathbf{x})_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j$, де $(A\mathbf{x})_i$ – i-та координата, можна формально означити добуток матриці A на вектор-стовпчик невідомих $\mathbf{x}$. У цьому випадку систему лінійних рівнянь (1) перепишеться у вигляді

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \qquad (S)$$

де $\mathbf{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^m$ є вектор-стовпчик, складений з правих частин.

Розв'язок системи (S) – це такий вектор $\mathbf{a} = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^n$, для якого виконується $A\mathbf{a} = \mathbf{b}$. Розв'язати систему рівнянь (S) означає: знайти всі розв'язки цієї системи або ж показати, що таких розв'язків немає.

Позначимо через $\mathbf{0} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathrm{R}^m$ нульовий вектор-стовпчик. Тоді однорідна система лінійних рівнянь запишеться у вигляді

$$A\mathbf{x} = \mathbf{0} \qquad (S_0)$$

Твердження. Множина розв'язків системи (S) не зміниться, якщо виконуватимуться елементарні перетворення над рядками розширеної матриці системи

$$\overline{A}=\left(\begin{array}{cccc|c} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} & b_2 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} & b_m \end{array}\right).$$

Метод Гаусса розв'язування систем лінійних рівнянь полягає в тому, що елементарними перетвореннями рядків розширена матриця системи зводиться до найпростішого східчастого вигляду. Після цього розв'язок системи виписується просто.

1. Розв’язати систему двох лінійних рівнянь з двома невідомими методом Крамера:

$$\begin{cases} 2x-3y=12 \\ -4x+y=8 \end{cases};$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ -4 & 1 \end{vmatrix}=-10$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 12 & -3 \\ 8 & 1 \end{vmatrix}=36$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 2 & 12 \\ -4 & 8 \end{vmatrix}=64$$

$$x=\frac{\Delta_x}{\Delta}=\frac{35}{-10}=-3.6$$

$$y=\frac{\Delta_y}{\Delta}=\frac{64}{-10}=-6.4$$

Відповідь: (-3.6; -6.4).

2.3. Вправи для самостійного розв’язування.

Завдання1. Розв’язати системи двох лінійних рівнянь з двома невідомими

1. $\begin{cases} -2x+4y=0 \\ 5x-y=4 \end{cases};$

2. $\begin{cases} x+5y=16 \\ 4y=12 \end{cases};$

3. $\begin{cases} 3x+2y=10 \\ 4x-y=6 \end{cases};$

4. $\begin{cases} 4x+2y=10 \\ x-3y=2 \end{cases};$

5. $\begin{cases} 5x-2y=3 \\ x-y=4 \end{cases};$

6. $\begin{cases} 4x-5y=0 \\ -3x+2y=1 \end{cases};$

7. $\begin{cases} x-2y=7 \\ 4x+3y=5 \end{cases};$

8. $\begin{cases} -x-6y=3 \\ -5x+2y=2 \end{cases}.$

Завдання 2. Розв’язати систему двох однорідних лінійних рівнянь з двома невідомими:

1. $\begin{cases} 3x+2y=0 \\ 5x-3y=0 \end{cases}$;

Завдання 3. При якому значенні k система має безліч розв’язків?

$$\begin{cases} 5x-k\,y=3 \\ \frac{5}{2}x+y=\frac{3}{2} \end{cases}.$$

Завдання 4. При якому значенні k система не має розв’язків?

$$\begin{cases} 3x-k\,y=9 \\ 2x+7y=4 \end{cases}.$$

Завдання 5. Дано матриці *A*, *B*. Потрібно знайти:

1) Виконати дії над матрицями: а) $3A+2B$; б) $AB-BA$.
2) Обчислити $f(A)$, $\varphi(A)$, , якщо $f(x)=x^3-3x^2+4x+5$, $\varphi(x)=x^2-4x+2$.

№ п/п	***A***	***B***
1.	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$
2.	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
3.	$\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$
4.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$
5.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
6.	$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
7.	$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$
8.	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
9.	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -2 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
10.	$\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 7 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}$
11.	$\begin{pmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$

12.	$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{pmatrix}$
13.	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -3 & 3 \end{pmatrix}$
14.	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -3 & -2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$
15.	$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 5 & -2 \end{pmatrix}$
16.	$\begin{pmatrix} 20 & -7 \\ 6 & -6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -6 & -4 \end{pmatrix}$
17.	$\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
18.	$\begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}$

2.4. Тест-контроль

Q1. Сумою яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 7 & -4 \end{pmatrix}$?

V1. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 4 & -5 \end{pmatrix}$.   V2. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -4 & 3 \end{pmatrix}$.

V3. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -7 & 4 \end{pmatrix}$.   V4. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 3 \end{pmatrix}$.

Q2. Різницею яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ -3 & -11 \end{pmatrix}$?

V1. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & -21 \\ 3 & 40 \end{pmatrix}$.   V2. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 5 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

V3. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.   V4. $\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 5 & 4 \end{pmatrix}$.

Q3. Добутком числа $\alpha = 2$ на матрицю $\begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$ є

V1. $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -2 & -8 \end{pmatrix}$.   V2. $\begin{pmatrix} 6 & 10 \\ -1 & -4 \end{pmatrix}$.

V3. $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}$.   V4. $\begin{pmatrix} 6 & 5 \\ -1 & -8 \end{pmatrix}$.

Q4. Добутком яких двох матриць є матриця $\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$?

V1. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.   V2. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$.

V3. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & 0 \end{pmatrix}$.   V4. $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Q5. Для якої матриці A приєднана матриця S має вигляд $S = \begin{pmatrix} 7 & 4 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$?

V1. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -5 & 6 \end{pmatrix}$.   V2. $A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ -4 & 7 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

V3. $A = \begin{pmatrix} 2 & 5 & 0 \\ -4 & 7 & 1 \end{pmatrix}$.   V4. $A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}$.

3. Завдання до дому:

- Опрацювати конспект лекції.
- До кожної властивості скласти і розв’язати власні приклади.
- Завдання. Дано матриці *A*, *B*. Потрібно знайти:
  - Виконати дії над матрицями: а) $3A + 2B$; б) $AB - BA$.
  - Обчислити $f(A)$, $\varphi(A)$, , якщо $f(x) = x^3 - 3x^2 + 4x + 5$, $\varphi(x) = x^2 - 4x + 2$.

№ п/п	***A***	***B***
19.	$\begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 10 & 4 \end{pmatrix}$
20.	$\begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 9 & 7 \\ 11 & 7 \end{pmatrix}$
21.	$\begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 8 & -2 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$
22.	$\begin{pmatrix} -8 & 4 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 8 \end{pmatrix}$

23.	$\begin{pmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$
24.	$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{pmatrix}$
25.	$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$
26.	$\begin{pmatrix} -3 & 5 \\ -6 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 & 8 \\ 10 & 0 \end{pmatrix}$
27.	$\begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$

4. Підсумки заняття.

Учні опонували такі нові поняття як матриця, типи матриць, лінійні перетворення та системи лінійних рівнянь двох змінних. Навчились виконувати дії над матрицями та знаходити розв’язки системи лінійних рівнянь з двома невідомими.

5. Список рекомендованої літератури .

1. Бродський Я.С. Матриці другого порядку та їх застосування. - Київ: Рад. шк., 1987р., вип.18- С. 119-139.
2. . Бурбаки Н. Очерки по истории математики.— М. : Изд-во иностр. лит., 1963.— 151 с.
3. Головина Л. Й. Линейная алгебра й некоторые ее приложения.— М. : Наука, 1985.— ,392 с.
4. С.А. Ашманов. Введение в математическую экономику. “Наука”. М., 1984
5. Р. Беллман. Введение в теорию матриц. “Наука”. М. 1969
6. С.А.Овсієнко, В.С.Мазорчук, Н.С.Головащук. Системи лінійних рівнянь. Навчальний посібник. – К:. ВПЦ “Київський університет”, 2002.

Висновки.

Робота може бути використана при проведенні додаткових занять, присвячених розгляду вибраних неелементарних питань математики, за допомогою методів, які доступні школярам, а також для використання в написанні роботи до конкурсу - захисту науково - дослідницьких робіт МАН.